

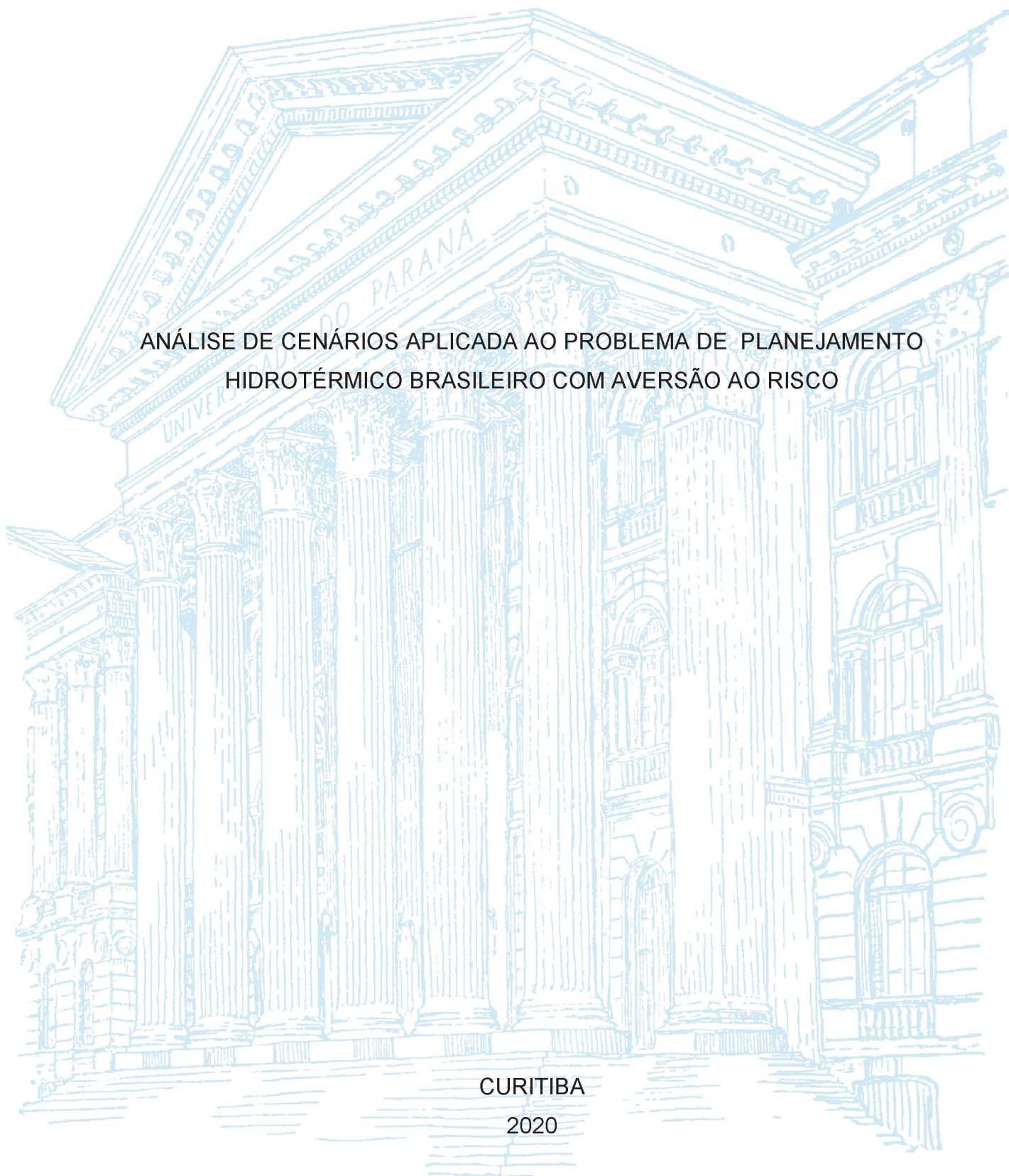
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KARLA CRISTIANE ARSIE

ANÁLISE DE CENÁRIOS APLICADA AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO  
HIDROTÉRMICO BRASILEIRO COM AVERSÃO AO RISCO

CURITIBA

2020



KARLA CRISTIANE ARSIE

ANÁLISE DE CENÁRIOS APLICADA AO PROBLEMA DE  
PLANEJAMENTO HIDROTÉRMICO BRASILEIRO COM AVERSÃO AO RISCO

Projeto de tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientadora: Dr.<sup>a</sup> Elizabeth Wegner Karas

Coorientadora: Dr.<sup>a</sup> Gislaine A. Peričaro

CURITIBA  
2020



CATALOGAÇÃO NA FONTE – SIBI/UFPR

---

A782a

Arsie, Karla Cristiane

Análise de cenários aplicada ao problema de planejamento hidrotérmico brasileiro com aversão ao risco [recurso eletrônico]/ Karla Cristiane Arsie - Curitiba, 2020.

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr.<sup>a</sup> Elizabeth Wegner Karas

Coorientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr.<sup>a</sup> Gislaine A. Perçaro

1. Sistemas hidrotérmicos. 2. Planejamento hidrotérmicos. 3. Usinas hidroelétricas. I. Karas, Elizabeth Wegner. II. Perçaro, Gislaine A. III. Título. IV. Universidade Federal do Paraná.

CDD 621.3

---

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -  
40001016041P1

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **KARLA CRISTIANE ARSIE** intitulada: **Análise de cenários aplicada ao problema de planejamento hidrotérmico brasileiro com aversão ao risco.**, sob orientação da Profa. Dra. ELIZABETH WEGNER KARAS, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 30 de Novembro de 2020.

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 16:04:40.0

ELIZABETH WEGNER KARAS

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 18:09:40.0

NELSON MACULAN FILHO

Avaliador Externo ( UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:16:48.0

LUIZ CARLOS MATIOLI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:13:17.0

MARCIA HELENA COSTA FAMPA

Avaliador Externo ( UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:57:31.0

MARCELO RODRIGUES BESSA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ-  
CURITIBA)



## ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia trinta de novembro de dois mil e vinte às 09:30 horas, na sala <https://meet.jit.si/DefesadeTesePPGM-KarlaCristianeArsie>, Remoto, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de tese da doutoranda **KARLA CRISTIANE ARSIE**, intitulada: **Análise de cenários aplicada ao problema de planejamento hidrotérmico brasileiro com aversão ao risco.**, sob orientação da Profa. Dra. ELIZABETH WEGNER KARAS. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: ELIZABETH WEGNER KARAS (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), NELSON MACULAN FILHO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO), LUIZ CARLOS MATIOLI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), MARCIA HELENA COSTA FAMPA (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO), MARCELO RODRIGUES BESSA (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - CURITIBA). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, ELIZABETH WEGNER KARAS, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 30 de Novembro de 2020.

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 16:04:40.0

ELIZABETH WEGNER KARAS

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 18:09:40.0

NELSON MACULAN FILHO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:16:48.0

LUIZ CARLOS MATIOLI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:13:17.0

MARCIA HELENA COSTA FAMPA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

30/11/2020 17:57:31.0

MARCELO RODRIGUES BESSA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - CURITIBA)



# AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas especiais que de sua maneira peculiar me apoiaram e me incentivaram na realização deste trabalho.

Agradeço à minha família pelo apoio, incentivo, amor e principalmente compreensão ao longo desta caminhada. Aos meus pais, Elenice e Nelson agradeço por me oferecerem um lar repleto de amor e me ensinarem a lutar pelos meus sonhos. Aos meus irmãos, Keilla e Dudu, por acreditarem em mim e estarem sempre ao meu lado.

Ao meu grande amigo, Rodrigo, por todo apoio, paciência, dedicação ao meu desenvolvimento, companheirismo e cumplicidade nessa trajetória.

Às minhas orientadoras, Elizabeth Wegner Karas e Gislaine A. Pericharo, agradeço pela dedicação incansável que destinaram ao meu trabalho, pelo apoio, conversas, incentivo, e por serem minha inspiração e exemplo para eu me tornar uma boa profissional e uma excelente pessoa.

Ao professor Clóvis Caesar Gonzaga agradeço por suas importantes contribuições, paciência e dedicação ao meu trabalho e minha formação.

Aos professores Nelson Maculan Filho, Luiz Carlos Matioli, Marcia Helena Costa Fampa e Marcelo Rodrigues Bessa agradeço suas disponibilidades em participar da banca e pelas contribuições para melhorar meu trabalho.

Ao projeto Lynx Energy Research Group, proposto pela Copel Geração e Transmissão S.A., agradeço pela oportunidade de realizar essa pesquisa, em especial aos colegas Débora Cíntia Marcilio e Eunelson José da Silva Junior por estarem sempre disponíveis para ajudar com os testes numéricos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR, pela oportunidade de cursar o doutorado.

À PUCPR por me apoiar e incentivar a sempre estar crescendo e me aperfeiçoando como professora.

# RESUMO

Nesta tese tratamos de problemas de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos através de análise de cenários, com inclusão de aversão ao risco. O problema de planejamento da operação consiste na obtenção de decisões operativas para geração de energia tanto pelas usinas hidroelétricas quanto pelas termoelétricas, de maneira a atender a demanda do sistema em um determinado período com o menor custo esperado de operação. O cálculo dessas decisões operativas depende do cenário de afluições ao longo do período considerado. Fixado um cenário a partir de um conjunto de cenários gerados com base em 85 anos de dados históricos das afluições mensais, temos um problema determinístico não linear de grande porte. As não linearidades do problema são devidas ao cálculo da altura de queda das usinas hidroelétricas nas restrições de atendimento à demanda. Por outro lado, desejamos obter soluções não antecipativas, isto é, soluções em que a decisão do primeiro mês independa dos  $L$  cenários considerados e minimize o custo esperado da operação. Esse problema é  $L$  vezes maior que o problema determinístico, e pode ser resolvido por métodos que decompõem o problema em vários subproblemas, como o método Progressive Hedging. Uma vantagem dos métodos de decomposição é permitir a paralelização de sua implementação. Além de considerar o problema minimizando-se o custo esperado de operação, incluímos a medida de risco *conditional value-at-risk* ( $CVaR$ ). Aplicamos esta medida no problema de planejamento hidrotérmico considerando três abordagens. A primeira consiste em aplicar a medida de risco  $CVaR$  no custo total da operação, a segunda apenas no custo do déficit, o qual é um evento que se deseja evitar e a terceira considera uma combinação convexa entre a esperança e a medida de risco  $CVaR$ , ambas do custo total. Outra contribuição da tese é a discussão de estratégias para redução do número de cenários de modo que a decisão obtida pela resolução do problema avesso ao risco considerando o subconjunto de cenários seja tão confiável quanto a decisão a partir do conjunto completo de cenários. Testes numéricos são apresentados para validação das técnicas apresentadas na resolução do problema de planejamento da operação de dois sistemas teste extraídos do Sistema Interligado Nacional com dados reais disponibilizados pelo Operador Nacional do Sistema.

Palavras-chave: Progressive Hedging; Planejamento hidrotérmico; Cenários Irrelevantes; Aversão ao risco.

# ABSTRACT

In this thesis we deal with long-term operation planning problems of hydrothermal power systems by considering scenario analysis and risk aversion. The operation planning problem consists in defining an operational policy, determining the generation of both hydroelectric and thermal plants in order to satisfy the system demand in a given period with the lowest expected operation cost. The definition of an operation policy depends on the scenario of inflows over the period considered. Once chosen a scenario from a set of scenarios generated from 85 years of historical data of month inflows, we have a large-scale deterministic problem that includes nonlinear constraints due to the head computation in hydroelectric plants. However, we wish to obtain non-anticipative solutions, i.e., solutions in which the decision of the first month does not depend on the  $L$  scenarios considered. This problem is  $L$  times larger than the deterministic one, and can be solved by methods that decompose the problem into  $L$  subproblems, such as the Progressive Hedging method. An advantage of the decomposition methods is allowing the parallelization of their implementation. In addition, we apply the risk measure *conditional value-at-risk* ( $CVaR$ ) in the operation cost minimizing problem considering three approaches. The first one applies the  $CVaR$  risk measure to the total operation cost. The second approach uses  $CVaR$  only on the deficit cost, which is an event to be avoided. And the third one considers a convex combination of the expected value and  $CVaR$  risk measure, both of the total cost. Another contribution of this thesis is the proposal of strategies to reduce the number of scenarios in such way that the decision obtained by solving the risk-averse problem considering the subset of effective scenarios is as reliable as the decision from the whole set of scenarios. Numerical experiments are presented for validation of the techniques proposed by solving the problem for two test systems extracted from the Brazilian interconnected system with real data provided by the *Operador Nacional do Sistema - ONS*.

Keywords: Hydrothermal planning; Risk Aversion; Effective scenarios; Progressive Hedging.



# LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação geométrica da expressão $F(z) = P(Z \leq z)$ . . . . .	20
1.2	Representação geométrica do significado de $VaR_\alpha$ e $CVaR_\alpha$ para uma variável aleatória contínua. . . . .	23
1.3	Decomposição do evento $v$ em dois eventos com os índices $w_1$ e $w_2$ . . . . .	25
1.4	Interpretação geométrica do Teorema 1.23. . . . .	26
1.5	Gráfico da função $G$ (esquerda) e gráfico da função de distribuição (direita). . .	27
1.6	Gráfico da função $G$ (esquerda) e gráfico da função de distribuição (direita). . .	28
1.7	Gráfico da função de distribuição com evento fictício. . . . .	29
3.1	Capacidade Instalada do SIN- 2020/2024. . . . .	44
3.2	Componentes de uma usina hidroelétrica. . . . .	44
3.3	Esquema simplificado de uma usina térmica a vapor. . . . .	45
3.4	Cascata do rio Iguaçu. . . . .	46
3.5	Níveis de um reservatório. . . . .	46
3.6	Sistema de Transmissão - Horizonte 2024. . . . .	47
3.7	Exemplo de três reservatórios em cascata. . . . .	56
3.8	Conjunto de cenários de aflúncias. . . . .	60
4.1	Diagrama esquemático das usinas hidroelétricas do SIN. . . . .	70
4.2	Grafo com as linhas de intercâmbio entre os subsistemas. . . . .	71
4.3	Sistema de 141 usinas. . . . .	72
4.4	Sistema de 21 usinas. . . . .	73
4.5	Custo do planejamento da operação do primeiro mês por cenário para o sistema 21. . . . .	74
4.6	Custo do planejamento para o primeiro mês por cenário para o sistema 141. . .	75
4.7	Custos ordenados do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos (esquerda) e sintéticos (direita). . . . .	76
4.8	Comparação da distribuição dos custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos e sintéticos. . . . .	76
4.9	Distribuição dos custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos. . . . .	77
4.10	Variação de (4.5) ao longo das iterações das quatro variantes do PH. . . . .	78
4.11	Custo médio obtido com as duas variantes. . . . .	79
4.12	Comparação dos custos da operação obtidos por PH e SD. . . . .	80
4.13	Potência pelos dois métodos. . . . .	81
4.14	Comparação dos resultados obtidos por PH e SD com aversão ao risco. . . . .	81
4.15	Comparação entre os custos ordenados. . . . .	84

4.16	Custos ao longo das iterações do PH, com nível de confiança 70%. . . . .	85
4.17	Custos ordenados. . . . .	86
4.18	Custos dos déficits ao longo das iterações do PH, com nível de confiança 70%. .	86
4.19	Comparação entre os custos obtidos pela abordagem sem aversão ao risco e pela combinação convexa entre a esperança e a medida de risco $CVaR_\alpha$ . . . . .	87
4.20	Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita). . . . .	89
4.21	Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957 e demanda aumentada em 10%. As barras da esquerda correspondem às de- cisões aversas ao risco no déficit e da direita aversas ao risco no custo total. . .	89
4.22	Vazões turbinadas resultantes dos problemas com aversão ao risco. . . . .	90
4.23	Custos associados aos cenários para as quatro situações com horizonte de 9 meses.	93
4.24	Custos associados aos cenários para as quatro situações com horizonte de 21 (esquerda) e 33 meses (direita). . . . .	93
4.25	Decisões do primeiro mês obtidas pelo problema original (3.23) e reduzido (4.8) com seleção de cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos. .	96
4.26	Vazões turbinadas e vertidas do primeiro mês com horizonte de 9 meses. . . .	97
4.27	Seleção de cenários acima do $\overline{VaR}_{0.7}$ . . . . .	98
4.28	Vazões turbinadas, com $\alpha = 0.8$ (esquerda) e $\alpha = 0.9$ (direita). . . . .	98
4.29	Custos fornecidos pelos problemas determinísticos com decisão do primeiro mês fixada, com $\alpha = 0.8$ (esquerda) e $\alpha = 0.9$ (direita). . . . .	99
4.30	Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita). . . . .	100
4.31	Custos acumulados para os anos de 1952, 1957 e 1993. . . . .	101
4.32	Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1952. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco . . . . .	101
4.33	Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco . . . . .	102
4.34	Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco . . . . .	103
4.35	Preços considerando o cenário histórico de 1952 para simulação. . . . .	103
4.36	Preços considerando o cenário histórico de 1957 para simulação. . . . .	104
4.37	Preços considerando o cenário histórico de 1993 para simulação. . . . .	104
4.38	Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita). . . . .	105
4.39	Valores mensais da potência. As barras da esquerda correspondem às decisões obtidas pela função de produção não linear e da direita linear. . . . .	105
4.40	Energia gerada (esquerda) e energia armazenada (direita). . . . .	106
D.1	Polinômio da área em função do volume e sua linearização para as usinas Foz do Areia (esquerda) e de Machadinho (direita). . . . .	130

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>1 Problemas não antecipativos através de análise de cenários</b>	<b>17</b>
1.1 Variáveis aleatórias . . . . .	17
1.2 Medidas de aversão ao risco . . . . .	20
1.3 Problemas de interesse . . . . .	30
1.4 Cenários irrelevantes . . . . .	34
<b>2 Algoritmo Progressive Hedging</b>	<b>36</b>
2.1 Algoritmo . . . . .	36
2.2 Inclusão de aversão ao risco . . . . .	40
<b>3 Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos</b>	<b>43</b>
3.1 Contextualização . . . . .	43
3.2 Modelagem do problema determinístico . . . . .	48
3.2.1 Modelagem . . . . .	49
3.2.2 Forma matricial das restrições lineares . . . . .	56
3.2.3 Formato geral . . . . .	58
3.3 O problema não antecipativo . . . . .	59
3.3.1 Particularidades do contexto . . . . .	59
3.3.2 Política não antecipativa . . . . .	61
3.4 Aversão ao risco . . . . .	63
3.4.1 Inclusão do risco no custo total . . . . .	63
3.4.2 Inclusão do risco na parcela do Déficit . . . . .	63
3.4.3 Risco como combinação convexa da esperança e de $CVaR_\alpha$ . . . . .	65
<b>4 Experimentos numéricos</b>	<b>67</b>
4.1 Recursos computacionais . . . . .	68
4.1.1 Método de Filtro . . . . .	68
4.2 Sistemas teste . . . . .	70
4.2.1 Sistema com 141 usinas hidroelétricas . . . . .	70
4.2.2 Sistema com 21 usinas hidroelétricas . . . . .	73
4.3 Cenários de afluentes . . . . .	74
4.3.1 Cenários para o Sistema 21 . . . . .	74
4.3.2 Cenários para o Sistema 141 . . . . .	75
4.4 Parâmetro de penalidade do Algoritmo PH . . . . .	77
4.5 Comparação entre os métodos sem e com decomposição . . . . .	79
4.5.1 Problema não antecipativo neutro ao risco . . . . .	80
4.5.2 Problema não antecipativo com aversão ao risco . . . . .	80
4.6 Comparação da função de produção linear e não linear . . . . .	82



4.6.1	Sistema 21 com 10 cenários . . . . .	82
4.6.2	Sistema 21 com 100 cenários e aversão ao risco . . . . .	83
4.7	Três metodologias de aversão ao risco . . . . .	84
4.7.1	Risco no custo total . . . . .	85
4.7.2	Risco no déficit . . . . .	85
4.7.3	Combinação convexa . . . . .	86
4.7.4	Simulação . . . . .	88
4.8	Influência de fixar a decisão do primeiro mês . . . . .	90
4.8.1	Situações analisadas . . . . .	90
4.8.2	Experimentos numéricos . . . . .	92
4.9	Estratégias de redução de número de cenários . . . . .	93
4.9.1	Algoritmo geral para seleção de cenários . . . . .	94
4.9.2	Seleção a partir das soluções dos problemas determinísticos . . . . .	95
4.9.3	Seleção a partir de soluções aproximadas . . . . .	95
4.10	Resultados com o Sistema 141 . . . . .	99
4.10.1	Redução de cenários . . . . .	99
4.10.2	Simulação . . . . .	100
<b>Conclusão</b>		<b>107</b>
<b>Referências</b>		<b>110</b>
<b>A Usinas Hidroelétricas</b>		<b>113</b>
<b>B Usinas Termoelétricas</b>		<b>117</b>
<b>C Coeficientes das funções do problema</b>		<b>121</b>
<b>D Coeficiente de evaporação</b>		<b>129</b>

# Introdução

A energia elétrica no Brasil é gerada por um sistema totalmente interligado, composto predominantemente, segundo [10], por usinas hidroelétricas (cerca de 65% da energia total) e termelétricas (cerca de 14%). Embora outras fontes de energia como eólica, solar, nuclear e biomassa contribuam também na geração de energia do Sistema Interligado Nacional (SIN) [22], o foco desta tese está no sistema hidrotérmico.

Enquanto a geração hidroelétrica tem um baixo custo de produção, o custo de geração térmica é alto devido ao combustível consumido. As usinas hidroelétricas são de dois tipos: as usinas fio d'água, nas quais toda a água que chega à barragem deve ser liberada imediatamente, e as usinas com reservatórios, para as quais é preciso decidir se a água é usada agora ou se é armazenada para usar mais tarde. A decisão a ser tomada em cada reservatório em um determinado período é a quantidade de água que deve ser usada para gerar energia, e obviamente depende das afluições. Apesar de não conseguirmos prever as afluições futuras com precisão, sabemos que o comportamento das vazões não é completamente aleatório, apresentando padrões sazonais e uma tendência que depende das vazões ocorridas anteriormente. A partir de uma análise estatística que considera conjuntos de cenários de afluições, estamos interessados na obtenção de decisões operativas para geração de energia tanto pelas usinas hidroelétricas quanto pelas termelétricas, de maneira a atender a demanda do sistema em um determinado período com o menor custo esperado de operação.

Atualmente, no Brasil, o Operador Nacional de Sistema (ONS) utiliza uma cadeia de softwares desenvolvidos pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) para a realização do planejamento da operação energética do SIN. Essa cadeia de softwares é estabelecida de acordo com o horizonte do planejamento considerado. Para o horizonte de médio prazo, que é o caso de interesse dessa tese, é empregado o algoritmo Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), proposto por Pereira e Pinto em [27]. No entanto, desde a implantação desses softwares o Setor Elétrico Brasileiro (SEB) sofreu grandes transformações. Diante disso, é válido o desenvolvimento de outros modelos de otimização de planejamento hidrotérmico visando atender o mercado de energia elétrica com o menor custo possível e garantindo a oferta futura de recursos energéticos [20].

Em nosso trabalho usamos um modelo de programação não linear do problema e ao invés de PDDE, usamos uma análise de cenários não antecipativa, considerando cenários de afluições sintéticos fornecidos pelos autores de [9] baseados em dados históricos de afluições disponíveis ao longo de 85 anos. O modelo do problema de planejamento hidrotérmico nacional usado foi o proposto em [20, 28], que visa a minimização dos custos de geração térmica, de déficit energético do sistema e do custo de intercâmbio entre os subsistemas, considerando restrições operativas das usinas, balanço hídrico, atendimento à demanda, evaporação e defluência mínima total nos reservatórios. O cálculo da altura de queda das usinas com reservatório usada nas restrições de atendimento à demanda é responsável pelas não linearidades do problema. Por outro lado, as restrições de balanço hídrico dependem das afluições que são as responsáveis pela estocasticidade do problema tratado nesta tese. Fixado um cenário de afluição, o problema de planejamento da operação se torna determinístico. No entanto, estamos

interessados em, considerando-se um conjunto de  $L$  cenários de afluências, obter uma decisão não antecipativa. Na definição de não antecipatividade de Rockafellar e Wets [38], as decisões associadas a cenários idênticos nos primeiros  $t$  estágios devem coincidir nesses estágios. Nos problemas estudados nesta tese, assumimos que os cenários são idênticos somente no primeiro estágio. Assim, estamos interessados em obter as decisões para o primeiro mês de planejamento que independa do cenário e minimize o custo esperado da operação.

Para a obtenção de uma política não antecipativa associada a um cenário com um horizonte de simulação fixados, resolvemos sequencialmente um problema não antecipativo seguido de um problema de curto prazo. Esse processo sequencial é realizado tantas vezes quanto for o horizonte de simulação. Em cada estágio do processo sequencial, a partir do volume inicial dos reservatórios, é resolvido um problema não antecipativo e obtém-se uma decisão para o primeiro mês. A partir dessa decisão, são fixadas as vazões turbinadas e vertidas para as usinas com reservatório, e resolvido um problema determinístico, para um único mês, com as afluências do cenário de simulação, e com o maior detalhamento possível do modelo. Obtém-se assim as demais decisões para este estágio. Repete-se esse processo, tomando-se como volume inicial para o próximo estágio aquele dado pelo balanço hídrico levando-se em consideração o volume anterior e as decisões do estágio atual. A sequência de decisões obtidas define a política para o cenário de simulação dado.

A modelagem do problema não antecipativo assume que o tomador de decisão é neutro ao risco, no sentido de que custos elevados associados a alguns cenários podem ser compensados por custos baixos em outros cenários. No entanto, em algumas situações, o tomador de decisão é avesso ao risco e deseja se proteger contra custos muito elevados. Neste caso, é interessante substituir a esperança na função objetivo por uma medida de risco. Uma das medidas de risco bastante utilizada é o *value-at-risk*, denotado por  $VaR$ , conforme [37, 41]. Apesar do  $VaR$  ser uma medida muito usada, ela não possui algumas propriedades interessantes para a otimização, como por exemplo, convexidade. Outra desvantagem desta medida é que ela não satisfaz a propriedade de subaditividade, ou seja, ela não se classifica como uma medida de risco coerente [41]. O *conditional value-at-risk*, denotado por  $CVaR$ , é uma alternativa natural para o  $VaR$ , já que o  $CVaR$  tem propriedades de coerência e convexidade [25]. Aversão ao risco no problema de planejamento hidrotérmico no contexto de PDDE já foi considerada por [6, 19]. Nesta tese discutem-se três abordagens para introduzir aversão ao risco no problema através de análise de cenários. A primeira consiste em aplicar a medida de risco  $CVaR$ , conforme Rockafellar e Uryasev em [37], no custo total da operação. A segunda abordagem, segue as ideias de Costa Junior [6], e aplica  $CVaR$  apenas no custo do déficit, o qual é um evento que se deseja evitar. A terceira, motivada por Shapiro [40], considera uma combinação convexa entre a esperança e a medida de risco  $CVaR$ , ambas do custo total.

Considerando  $L$  cenários de afluências, o problema não antecipativo de planejamento da operação é  $L$  vezes maior que o problema determinístico, que já é de grande porte. Podemos resolver este problema através de métodos de decomposição, como o algoritmo Progressive Hedging (PH) [38, 43]. O algoritmo PH é uma técnica de decomposição baseada em cenários. Essa técnica suaviza a complexidade computacional associada a grandes problemas ao decompor um problema estocástico em vários subproblemas e permite a paralelização de sua implementação. Outra estratégia para reduzir o tempo computacional é reduzir o número de cenários de modo que a decisão obtida pela resolução do problema avesso ao risco considerando esse subconjunto de cenários seja tão confiável quanto a decisão a partir do conjunto completo de cenários. Discutimos algumas técnicas para realizar essa redução, baseadas em [1, 32] que selecionam cenários que podem ser considerados com probabilidade nula de ocorrência na resolução do problema sem alterar o valor ótimo da função objetivo.



## Contribuições da tese

As principais contribuições da tese se referem ao tratamento do problema de planejamento da operação do SIN através de técnicas distintas das consideradas pelo ONS; ao uso de diferentes abordagens para inclusão da medida de risco  $CVaR$  no problema de planejamento da operação; à particularização de alguns resultados relacionados ao  $CVaR$  para o caso em que as variáveis aleatórias são discretas; à proposta de técnicas de redução do número de cenários considerados no problema não antecipativo com aversão ao risco; à validação e análise das propostas pela resolução computacional do problema de planejamento da operação de dois sistemas teste extraídos do SIN com dados reais disponibilizados pelo ONS.

## Estrutura do trabalho

Como trataremos de um problema estocástico com inclusão de uma medida de risco, faz-se necessário revisar algumas definições e alguns resultados da teoria de probabilidade. Estes conceitos, baseados em [8, 15, 37, 41], são apresentados no início do Capítulo 1. Em seguida, os conceitos de  $VaR$  e  $CVaR$  são introduzidos e particularizados para o caso discreto. Neste mesmo capítulo são abordados os problemas de interesse desta tese, trazendo definições e características de cada um deles. Uma dessas características é que a dimensão destes problemas está diretamente relacionada ao número de cenários considerado para representar as incertezas. Baseado em [1, 32], são propostas estratégias para redução do número de cenários considerados no problema não antecipativo com aversão ao risco.

O Capítulo 2, que é baseado em [6, 31, 37, 38, 43], é dedicado ao Algoritmo Progressive Hedging que será aplicado ao problema de planejamento da operação hidrotérmica. A ideia central desse método consiste em decompor o problema em subproblemas menores, de forma que as soluções individuais para cada cenário sejam combinadas para calcular uma solução ótima não antecipativa do problema original. Relatamos como esse problema será de fato resolvido e por fim, apresentamos as abordagens para o problema de planejamento hidrotérmico com aversão ao risco.

No Capítulo 3, apresentamos algumas características importantes do SEB e do SIN, e baseado em [5, 17, 22, 24] são destacadas algumas propriedades de funcionamento das usinas hidroelétricas e termoelétricas. Na sequência é apresentado o modelo determinístico como um problema de programação não linear, seguindo as ideias de [20], em que é considerado fixado um cenário de aflúências. Apresentamos uma representação dos cenários de aflúências fornecidos pelos autores de [9] e descrevemos como uma política não antecipativa é determinada. Por fim, são analisadas três alternativas para inclusão de aversão ao risco no caso particular do problema do planejamento, conforme [6, 40].

No Capítulo 4 são descritos e analisados os testes numéricos com a finalidade de validar e comparar resultados obtidos da resolução do problema de planejamento hidrotérmico utilizando o método de decomposição PH. A validação se dá pela comparação dos resultados obtidos na resolução do mesmo problema utilizando o método sem decomposição proposto por [31]. Apresentamos resultados numéricos comparando as três metodologias de inclusão de aversão ao risco no problema do planejamento: inclusão da medida  $CVaR$  na função custo, na parcela relacionada com o custo do déficit e a combinação convexa entre a esperança e o  $CVaR$ , ambos na função custo. Comparamos também os custos do planejamento da operação fixando a decisão do primeiro mês obtida pelas diferentes estratégias relacionadas à medida de risco  $CVaR$  na função custo. Por fim, a última seção desse capítulo é dedicada à obtenção de uma política não antecipativa através de simulações, para a resolução do problema de planejamento da operação do sistema considerando as abordagens sem risco e com aversão ao risco no custo total.

Finalmente são apresentadas conclusões da tese. Os dados do SIN utilizados no trabalho são descritos nos apêndices. As informações sobre as usinas hidroelétricas e termoelétricas

estão nos Apêndices A e B, respectivamente. As tabelas referentes aos coeficientes das funções do problema são apresentadas no Apêndice C. O Apêndice D descreve como os coeficientes de evaporação foram determinados.

# Capítulo 1

## Problemas não antecipativos através de análise de cenários

Este capítulo é dedicado à apresentação dos problemas estocásticos de decisões sequenciais de interesse dessa tese. Esses problemas envolvem tomadas de decisões sujeitas a incertezas, ao longo de vários estágios. As incertezas são tratadas através de análises de cenários e as decisões devem ser tomadas sem assumir conhecimento de suas realizações futuras, ou seja, as decisões devem ser não antecipativas. Além disso, a tomada de decisão pode ser neutra ou avessa ao risco.

Inicialmente, com base em [8, 15], é apresentada uma revisão de algumas definições e resultados da teoria de probabilidade. Tendo como referências [37, 41], são definidas e discutidas duas medidas de aversão ao risco: *value-at-risk* ( $VaR$ ) e *conditional value-at-risk* ( $CVaR$ ). Para essas medidas, particularizamos alguns resultados para o caso em que as variáveis aleatórias são discretas.

Na Seção 1.3 são abordados especificamente os problemas de interesse dessa tese, trazendo definições e características de cada um deles. Uma dessas características é que a dimensão destes problemas está diretamente relacionada ao número de cenários considerado para representar as incertezas. Conceitos envolvidos na redução desse número são discutidos na Seção 1.4, em que é apresentada a definição de cenários irrelevantes, baseada em [1, 32].

### 1.1 Variáveis aleatórias

Consideremos um experimento que forneça resultados imprevisíveis e mutuamente exclusivos, ou seja, que a cada repetição é impossível prever, com absoluta certeza, qual resultado será obtido. Além disso, a ocorrência de um deles exclui os demais. Lançamento de um dado, de uma moeda e se choverá amanhã, são exemplos deste tipo de experimento. Todo experimento desta natureza é chamado de aleatório e seus resultados são chamados de eventos simples. O conjunto de todos os eventos simples de um experimento é chamado de *espaço amostral*, denotado por  $\Omega$ .

**Definição 1.1 (Def. 1.1, [15])** *Seja  $\Omega$  o espaço amostral de um experimento. Todo subconjunto  $A \subset \Omega$  será chamado evento. O espaço amostral  $\Omega$  é o evento certo e o conjunto  $\emptyset$  é o evento impossível. Se  $\omega \in \Omega$ , o evento  $\{\omega\}$  é dito elementar (ou simples).*

**Observação 1.2** *O subconjunto  $A^c \subset \Omega$  denota o complementar de  $A$ , formado pelos elementos de  $\Omega$  que não pertencem a  $A$ .*

**Definição 1.3 (Def. 1.2, [15])** Um evento  $A$  ao qual é atribuída uma probabilidade é chamado evento aleatório.

Considera-se  $\mathcal{F}$  a classe dos subconjuntos do espaço amostral aos quais se atribui uma probabilidade. Como  $\Omega$  representa o conjunto de todos os resultados possíveis, a probabilidade de  $\Omega$  é igual a 1. Portanto  $\Omega$  deve pertencer a  $\mathcal{F}$ .

**Definição 1.4** Seja  $\Omega$  um conjunto não vazio. Uma classe  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
2. Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$ ; e
3. Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \in \mathcal{F}$ , então  $A \cup B \in \mathcal{F}$

é chamada de  $\sigma$ -álgebra.

**Definição 1.5 (Def. 1.6, [15])** Um espaço de probabilidade é um trio  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , em que:

- $\Omega$  é um conjunto não vazio;
- $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ ; e
- $P$  é uma probabilidade em  $\mathcal{F}$ .

**Definição 1.6 (Def.1.7, [15])** Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Se  $B \in \mathcal{F}$  e  $P(B) > 0$ , a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , denotada por  $P(A | B)$ , é definida por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

**Definição 1.7 (Def. 2.1, [15])** Uma variável aleatória  $Z$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é uma função real definida no espaço  $\Omega$  tal que o evento  $\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq z\}$ , denotado por  $[Z \leq z]$  é evento aleatório para todo  $z \in \mathbb{R}$ , isto é,  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é variável aleatória se  $[Z \leq z] \in \mathcal{F}$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ .

Um exemplo de uma variável aleatória é a função indicadora  $1_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  de um conjunto  $A \in \mathcal{F}$  definida como segue:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (1.1)$$

**Definição 1.8 (Def. 2.2, [15])** A função de distribuição da variável aleatória  $Z$ , representada por  $F_Z$  ou simplesmente  $F$ , é definida por

$$F_Z(z) = P(Z \leq z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.9 (Def.2.3, [15])** Uma variável aleatória é classificada em discreta ou (absolutamente) contínua:



1. A variável aleatória  $Z$  é discreta se toma um número finito ou enumerável de valores, i.e., se existe um conjunto finito ou enumerável  $\{z_1, z_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $Z(\omega) \in \{z_1, z_2, \dots\}$  para todo  $\omega \in \Omega$ . A função  $p(z_\ell)$  definida por  $p(z_\ell) = P(Z = z_\ell)$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$ , é chamada função de probabilidade de  $Z$ . Na sequência, denotaremos  $p(z_\ell)$  simplesmente por  $p_\ell$ .
2. A variável aleatória  $Z$  é (absolutamente) contínua se existe uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(t)dt, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos  $f$  é dita função de densidade de probabilidade de  $Z$  ou simplesmente densidade de  $Z$ .

Em outras palavras, uma função  $Z$ , definida no espaço amostral  $\Omega$  e com valores em um conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta. No caso da variável aleatória contínua os valores que a função  $Z$  assume estão em um intervalo de números reais.

**Observação 1.10** Se  $Z$  é discreta com  $Z(\omega) \in \{z_1, \dots, z_L\}$  para todo  $\omega \in \Omega$ , então  $[Z \geq z] = \bigcup_{\ell: z_\ell \geq z} [Z = z_\ell]$ . Logo,

$$P(Z \geq z) = \sum_{i: z_i \geq z} P(Z = z_i) = \sum_{\ell: z_\ell \geq z} p(z_\ell) = \sum_{\ell=1}^L p(z_\ell) \cdot 1_{z_\ell \geq z},$$

em que  $1_{z_\ell \geq z}$  é a função indicadora definida em (1.1) com  $A = \{z_\ell \mid z_\ell \geq z\}$ . Em particular, se os eventos são equiprováveis, ou seja,  $p(z_\ell) = \frac{1}{L}$ , então

$$P(Z \geq z) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L 1_{z_\ell \geq z}, \quad (1.2)$$

ou seja,

$$\sum_{\ell=1}^L 1_{z_\ell \geq z} = L \cdot P(Z \geq z). \quad (1.3)$$

**Observação 1.11** Um função  $f(z) \geq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{R}$ , é densidade de alguma variável aleatória se, e somente se,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 1$ .

A Figura 1.1 exibe o gráfico de uma função densidade  $f$ . Geometricamente,  $F(z) = P(Z \leq z)$  representa a área abaixo do gráfico de  $f$  no intervalo  $(-\infty, z]$ .

**Definição 1.12** Seja  $Z$  uma variável aleatória discreta com uma função de probabilidade  $p(z_\ell) = P(Z = z_\ell)$ . A esperança de  $Z$ , também chamada de média de  $Z$  ou valor esperado de  $Z$ , é definida por

$$E[Z] = \sum_{\ell} z_\ell p(z_\ell) = \sum_{\ell} z_\ell P(Z = z_\ell).$$

Este valor está bem definido quando a soma não depende da ordem dos termos, em particular quando a série converge absolutamente, i.e.,  $\sum_{\ell} |z_\ell| p(z_\ell) < \infty$ .

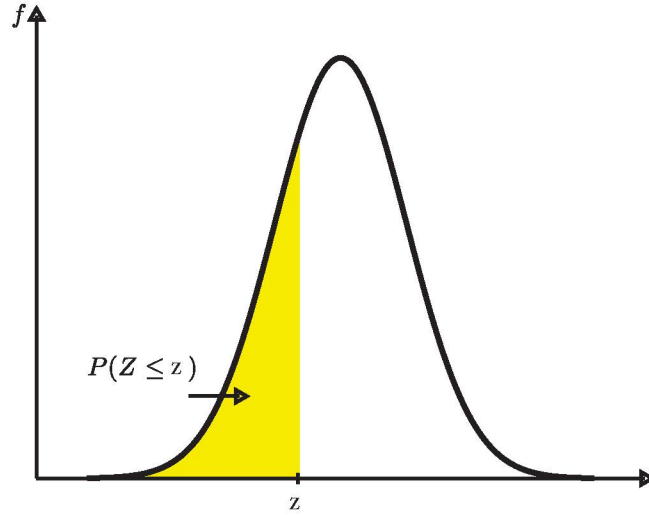


Figura 1.1: Representação geométrica da expressão  $F(z) = P(Z \leq z)$ .

Fonte: A autora

A Definição 1.12 é específica para uma variável aleatória discreta. A seguir uma definição de esperança mais geral, que contempla também os casos em que se tem variável aleatória contínua.

**Definição 1.13** (Def.3.1, [15]) *Seja  $Z$  uma variável aleatória qualquer e  $F$  sua função de distribuição. A esperança de  $Z$  é definida por*

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z dF(z),$$

*quando a integral imprópria de Riemann-Stieltjes está bem definida.*

**Observação 1.14** *Se  $Z$  tem densidade  $f(z)$ , então*

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z dF(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz.$$

*Se a densidade  $f$  for Riemann integrável então esta última integral também será de Riemann.*

**Definição 1.15** *Seja  $Z$  uma variável aleatória qualquer. A variância de  $Z$  é definida por*

$$V(Z) = E[Z - E[Z]]^2.$$

**Observação 1.16** *O valor  $E[Z - E[Z]]^k$ , com  $k = 1, 2, 3, \dots$ , é chamado de  $k$ -ésimo momento central de  $Z$ . Quando  $k = 1$ , o momento central é nulo e quando  $k = 2$ , chamado de segundo momento central, é a variância.*

## 1.2 Medidas de aversão ao risco

Nesta seção apresentamos as definições de duas medidas de aversão ao risco: *value-at-risk* (*VaR*) e *conditional value-at-risk* (*CVaR*) abordadas em [37, 41]. Uma medida de aversão ao risco é utilizada para aumentar a segurança na tomada de alguma decisão, pois tende a permitir

que o decisor faça uma melhor avaliação da possibilidade da existência de riscos eventuais, bem como evitar decisões que podem proporcionar perdas para uma determinada situação.

Neste trabalho concentramos nossa atenção à medida  $CVaR$ . Mas antes de defini-la, precisamos introduzir a medida  $VaR$ .

**Definição 1.17 ([32])** *O valor em risco (value-at-risk) de uma variável aleatória  $Z$  com função de distribuição  $F$  e nível de risco  $\alpha \in (0, 1)$ , denotado  $VaR_\alpha(Z)$ , é definido por*

$$VaR_\alpha(Z) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \{z \mid F(z) \geq \alpha\}.$$

Usando a definição da função de distribuição  $F$ , segue que

$$VaR_\alpha(Z) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \{z \mid P(Z \leq z) \geq \alpha\} \quad (1.4)$$

ou, equivalentemente,

$$VaR_\alpha(Z) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \{z \mid P(Z > z) \leq 1 - \alpha\},$$

o que significa que valores da variável aleatória  $Z$  maiores que  $VaR_\alpha(Z)$  ocorrem com probabilidade que não excede  $(1 - \alpha)$ . Cabe ressaltar que a medida de risco  $VaR_\alpha$  é geralmente não convexa e descontínua como discutido por Rockafellar e Uryasev em [37].

Antes de definir a medida de risco  $CVaR_\alpha$ , precisamos da definição da função  $\alpha$ -cauda associada a  $VaR_\alpha$ .

**Definição 1.18** *Considere  $Z$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F$ . Dado  $\alpha \in (0, 1)$ , defina a função  $\alpha$ -cauda, denotada por  $f_\alpha$ , como aquela associada à função de distribuição dada por*

$$F_{Z,\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < VaR_\alpha(Z), \\ \frac{F(z) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{se } z \geq VaR_\alpha(Z). \end{cases} \quad (1.5)$$

A partir da função de distribuição  $\alpha$ -cauda, definimos o valor em risco condicional (conditional value-at-risk),  $CVaR_\alpha$ , segundo [35, Def. 3].

**Definição 1.19** *Considere  $Z$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F$ . Dado  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $CVaR_\alpha$  da variável  $Z$  é a esperança da distribuição  $\alpha$ -cauda.*

Uma vantagem do  $CVaR_\alpha$  sobre o  $VaR_\alpha$  é que goza da propriedade de continuidade e convexidade, abordada por Rockafellar e Uryasev em [41]. Além dessas propriedades, o  $CVaR_\alpha$  define uma medida de risco coerente pois, segundo [41], satisfaz:

- Convexidade: se  $Z_1$  e  $Z_2$  são variáveis aleatórias e  $\beta \in [0, 1]$  então

$$CVaR_\alpha(\beta Z_1 + (1 - \beta)Z_2) \leq \beta CVaR_\alpha(Z_1) + (1 - \beta)CVaR_\alpha(Z_2).$$

- Monotonicidade: se  $Z_1 \leq Z_2$  são variáveis aleatórias então

$$CVaR_\alpha(Z_1) \leq CVaR_\alpha(Z_2).$$

- Homogeneidade positiva: Se  $Z$  é uma variável aleatória e  $\beta > 0$  então

$$CVaR_\alpha(\beta Z) = \beta CVaR_\alpha(Z).$$

- Invariância de translação: Se  $Z$  é uma variável aleatória e  $a \in \mathbb{R}$  então

$$CVaR_\alpha(Z + a) = CVaR_\alpha(Z) + a.$$

A partir de  $VaR_\alpha$  para dado  $\alpha \in (0, 1)$ , define-se  $CVaR_\alpha^-(Z)$  e  $CVaR_\alpha^+(Z)$ , conforme [35, Def. 4].

**Definição 1.20** Dado  $\alpha \in (0, 1)$ , define-se:

$$CVaR_\alpha^-(Z) = E[Z \mid Z \geq VaR_\alpha(Z)] \quad (1.6)$$

e

$$CVaR_\alpha^+(Z) = E[Z \mid Z > VaR_\alpha(Z)]. \quad (1.7)$$

Se a função de distribuição de probabilidade é contínua, os valores (1.6) e (1.7) coincidem com  $CVaR_\alpha$  dado pela Definição 1.19. No entanto, quando a distribuição tem saltos de descontinuidade, a situação é mais delicada, conforme a próxima proposição.

**Proposição 1.21** Considere  $\alpha \in (0, 1)$  e uma variável aleatória  $Z$  com função de distribuição  $F$ . Se  $F$  é contínua em  $VaR_\alpha(Z)$ , vale a igualdade

$$CVaR_\alpha^-(Z) = CVaR_\alpha(Z) = CVaR_\alpha^+(Z). \quad (1.8)$$

Caso contrário, há três situações:

- Se  $\alpha = F(VaR_\alpha)$ , então  $CVaR_\alpha^-(Z) < CVaR_\alpha(Z) = CVaR_\alpha^+(Z)$ .
- Se  $F(VaR_\alpha) = 1$ , então  $CVaR_\alpha^-(Z) = CVaR_\alpha(Z)$  e  $CVaR_\alpha^+(Z)$  não está bem definido.
- Nos demais casos, ou sejam, em que  $\alpha < F(VaR_\alpha) < 1$ , valem as desigualdades:

$$CVaR_\alpha^-(Z) < CVaR_\alpha(Z) < CVaR_\alpha^+(Z). \quad (1.9)$$

*Demonstração.* [35, Prop. 5]. □

Para uma variável aleatória associada a uma função de distribuição contínua, a medida  $CVaR_\alpha$  representa o valor esperado condicionado aos valores da variável aleatória maiores que  $VaR_\alpha(Z)$ , como ilustrado na Figura 1.2. A imagem da esquerda mostra o gráfico da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua, enquanto a da direita ilustra a função de distribuição correspondente. Em ambas, estão assinalados os valores de  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  para um dado  $\alpha$ .

A definição do  $CVaR_\alpha$  dada em (1.19) está condicionada ao cálculo de  $VaR_\alpha$ , conservando assim as dificuldades de sua representação. Para eliminar estas dificuldades, vamos descrever  $CVaR_\alpha$  de uma maneira independente do  $VaR_\alpha$ , como discutido por Shapiro, Dentcheva e Ruszczyński em [41].

**Teorema 1.22** Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e considere uma variável aleatória  $Z$  contínua com função de distribuição  $F$ . Então

$$CVaR_\alpha(Z) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda + \frac{1}{1 - \alpha} E[\max\{0, Z - \lambda\}] \right\}. \quad (1.10)$$

Além disso, o conjunto dos minimizadores

$$A(Z) = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda + \frac{1}{1 - \alpha} E[\max\{0, Z - \lambda\}] \right\}$$

é um intervalo não vazio limitado e fechado (possivelmente, reduzindo-se a um único ponto), cujo extremo esquerdo do intervalo coincide com  $VaR_\alpha(Z)$ .



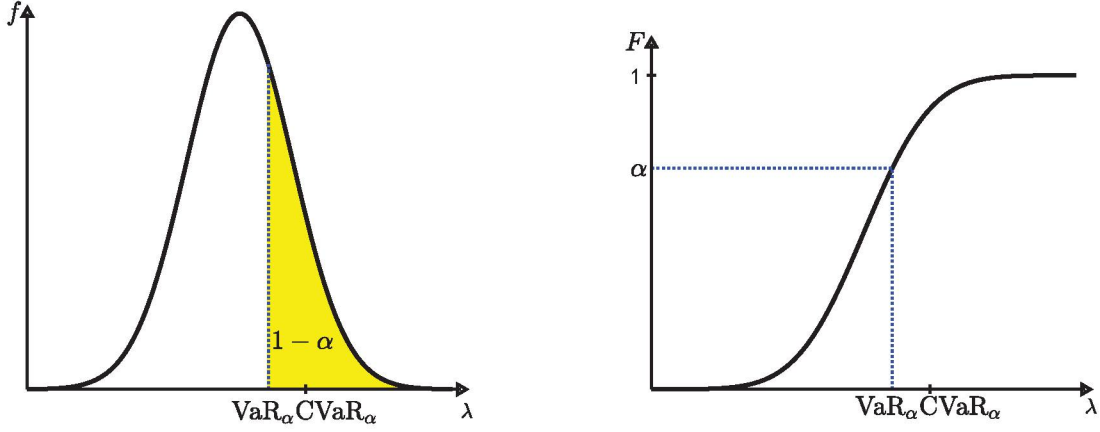


Figura 1.2: Representação geométrica do significado de  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  para uma variável aleatória contínua.

Fonte: A autora

*Demonstração.* [37, Thm 1.] □

### Caso discreto

Como uma das contribuições dessa tese, particularizamos agora as definições de  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  para o caso em que a variável aleatória  $Z$  é discreta, assumindo valores reais  $\{z_1, z_2, \dots, z_L\}$  com probabilidade associada  $p_\ell$ , para  $\ell = 1, \dots, L$ , e que sua ordenação seja conhecida, ou seja:

$$z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_L.$$

Dado um nível de confiança  $\alpha \in (0, 1)$ , pela Definição 1.17,

$$VaR_\alpha(Z) = z_v,$$

em que

$$v = \min\{\ell = 1, \dots, L \mid F(z_\ell) \geq \alpha\}.$$

Seja  $\alpha^+ = F(VaR_\alpha)$ . Considere primeiramente que  $\alpha^+ = \alpha = F(VaR_\alpha) < 1$ . Pela Proposição 1.21, temos que

$$CVaR_\alpha = \frac{\sum_{\ell=v+1}^L p_\ell z_\ell}{\sum_{\ell=v+1}^L p_\ell} = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{\ell=v+1}^L p_\ell z_\ell, \quad (1.11)$$

em que usamos o fato de que

$$\sum_{\ell=v+1}^L p_\ell = 1 - \alpha. \quad (1.12)$$

De (1.11) e (1.12), segue que, para qualquer  $z > 0$

$$(1 - \alpha)CVaR_\alpha = \sum_{\ell=v+1}^L p_\ell z_\ell + (1 - \alpha)z - (1 - \alpha)z = (1 - \alpha)z + \sum_{\ell=v+1}^L p_\ell(z_\ell - z). \quad (1.13)$$

Esta expressão serve de motivação para a fórmula fundamental definida por Rockafellar e Uryasev em [37]:

$$z \in [0, z_L] \mapsto G(z) = z + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{\ell=1}^L p_\ell [z_\ell - z]^+. \quad (1.14)$$

Segue-se imediatamente que

$$G(\text{VaR}_\alpha) = G(z_v) = \text{CVaR}_\alpha,$$

porque  $z_\ell - z_v > 0$  somente se  $\ell > v = \min\{\ell = 1, \dots, L \mid F_{z_\ell}(z) \geq \alpha\}$ .

O próximo resultado é análogo ao Teorema 1.22, mas para o caso em que a variável aleatória é discreta.

**Teorema 1.23** *Considere  $\alpha = F(\text{VaR}_\alpha) < 1$ ,  $z_v = \text{VaR}_\alpha$  e a função  $G$  definida em (1.14). Então  $G$  é convexa e satisfaz*

$$\min_{z \geq 0} G(z) = \text{CVaR}_\alpha \quad e \quad \operatorname{argmin}_{z \geq 0} G(z) = [z_v, z_{v+1}]. \quad (1.15)$$

*Demonstração.* Para simplificar, provamos os resultados para a função

$$\Gamma(z) = (1-\alpha)G(z) = (1-\alpha)z + \sum_{i=1}^L p_i [z_i - z]^+. \quad (1.16)$$

A convexidade decorre do fato de que cada termo  $[z_i - z]^+ = \max\{0, z_i - z\}$  é convexa, pois é o máximo de duas funções convexas. Vamos analisar a última parcela de (1.16) considerando três casos:

(i)  $0 \leq z < z_v$ : neste caso  $z_i - z > 0$ , para  $i = v, v+1, \dots, L$  e então

$$\sum_{i=1}^L p_i [z_i - z]^+ \geq \sum_{i=v+1}^L p_i [z_i - z]^+ + p_v(z_v - z) > \sum_{i=v+1}^L p_i (z_i - z).$$

(ii)  $z \in [z_v, z_{v+1}]$ : neste caso  $z_i \geq z$ , ou equivalentemente  $[z_i - z]^+ \geq 0$ , para  $i = v+1, \dots, L$ , e  $z_i \leq z$ , ou equivalentemente  $[z_i - z]^+ = 0$ , para  $i = 1, \dots, v$ . Então,

$$\sum_{i=1}^L p_i [z_i - z]^+ = \sum_{i=v+1}^L p_i (z_i - z).$$

(iii)  $z > z_{v+1}$ : neste caso  $z > z_i$ ,  $i = 1, \dots, v+1$ , com  $z_{v+1} - z < 0 = [z_{v+1} - z]^+$ . Consequentemente,

$$\sum_{i=1}^L p_i [z_i - z]^+ > \sum_{i=v+1}^L p_i (z_i - z).$$

Em todos os casos, temos que

$$\sum_{i=1}^L p_i [z_i - z]^+ \geq \sum_{i=v+1}^L p_i (z_i - z),$$

valendo a igualdade somente quando  $z \in [z_v, z_{v+1}]$ . Aplicando esta desigualdade em (1.16) e usando (1.13), temos que

$$\Gamma(z) \geq (1 - \alpha)z + \sum_{i=v+1}^L p_\ell(z_\ell - z) = (1 - \alpha)CVaR_\alpha,$$

o que estabelece (1.15) e completa a prova.  $\square$

Agora estabelecemos o resultado para o caso em que  $\alpha^+ > \alpha$ . Vamos apresentar um evento fictício decompondo o evento  $v$  em dois eventos com índices  $w_1$  e  $w_2$  (ver Figura 1.3) e probabilidades

$$p_{w_1} = \alpha - F_Z(z_{v-1}), \quad p_{w_2} = \alpha^+ - \alpha, \quad \text{com} \quad z_{w_1} = z_{w_2} = z_v.$$

Os termos correspondentes na função  $G$  definida em (1.14) serão

$$p_{w_1}[z_{w_1} - z]^+ + p_{w_2}[z_{w_2} - z]^+ = (p_{w_1} + p_{w_2})[z_v - z]^+ = p_v(z_v - z),$$

e a função modificada coincide com a original.

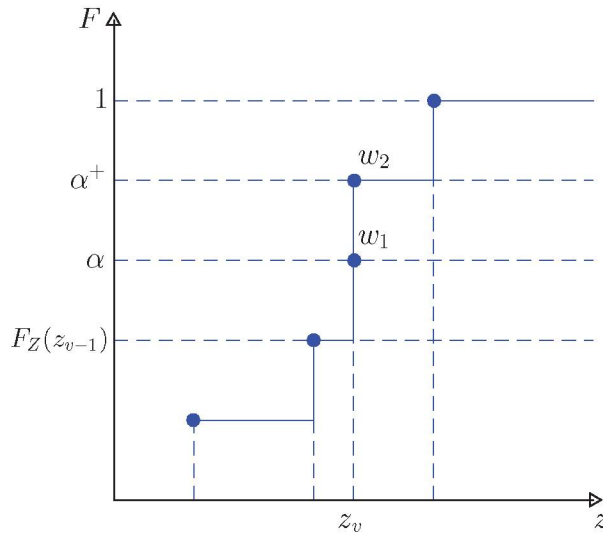


Figura 1.3: Decomposição do evento  $v$  em dois eventos com os índices  $w_1$  e  $w_2$ .

O Teorema 1.23 fornece uma relação direta entre  $CVaR_\alpha$  e  $VaR_\alpha$  dada por

$$CVaR_\alpha(Z) = VaR_\alpha(Z) + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{\ell=1}^L p_\ell [z_\ell - VaR_\alpha(Z)]^+.$$

A Figura 1.4 ilustra o resultado do Teorema 1.23 em que uma variável aleatória discreta assume valores  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_L$ . A linha contínua preta representa o gráfico da função identidade; a linha tracejada azul representa o gráfico da função  $S$  que associa a cada  $z$  a parcela

$\frac{1}{1 - \alpha} \sum_{\ell=1}^L p_\ell [z_\ell - z]^+$  da função  $G$  dada em 1.14; enquanto a linha pontilhada vermelha indica a soma desta parcela  $S$  com a identidade, ou seja, a função  $G$ , para um dado  $\alpha \in (0, 1)$ . O

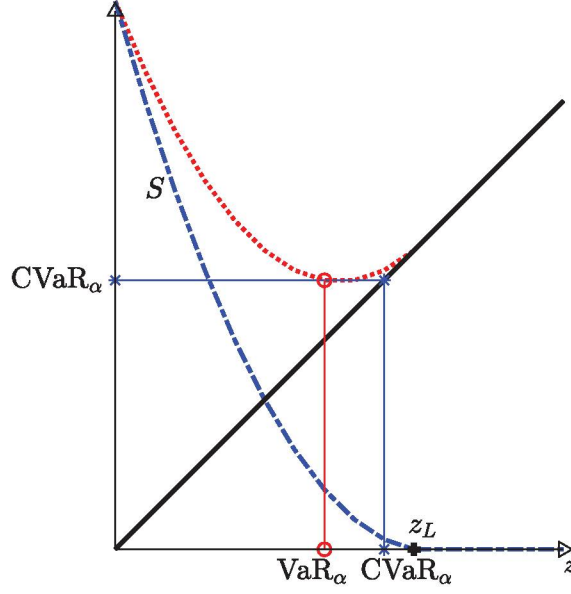


Figura 1.4: Interpretação geométrica do Teorema 1.23.

Fonte: A autora

menor dos minimizadores da função  $G$  é o  $VaR_\alpha$ , enquanto seu valor mínimo é  $CVaR_\alpha$ . Note que a função  $S$  se anula para  $z \geq z_L$ , já que  $\max\{0, z_\ell - z\} = 0$  para todo  $\ell = 1, \dots, L$  e consequentemente a função  $G$  coincide com a função identidade.

Apresentamos a seguir uma das contribuições dessa tese que será utilizada na Seção 3.4.

**Lema 1.24** *Considere  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $Z$  e  $\bar{Z}$  duas variáveis aleatórias discretas que assumem os valores  $z_1, z_2, \dots, z_L$  e  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_L$  respectivamente, com  $P(Z = z_\ell) = P(\bar{Z} = \bar{z}_\ell) = \frac{1}{L}$  para todo  $\ell = 1, \dots, L$ . Se  $CVaR_\alpha(Z)$  é o conditional value-at-risk de  $Z$  e  $E[\bar{Z}]$  a esperança da variável  $\bar{Z}$  então*

$$CVaR_\alpha(Z) + E[\bar{Z}] = \min_{z \in \mathbb{R}} \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{1}{L} (\bar{z}_\ell + z) + \frac{1}{L(1-\alpha)} \max\{0, z_\ell - z\} \right).$$

*Demonstração.* Como os eventos são equiprováveis, pelo Teorema 1.23 temos que

$$CVaR_\alpha(Z) = \min_{z \in \mathbb{R}} \left( z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L \max\{0, z_\ell - z\} \right). \quad (1.17)$$

Somando  $E[\bar{Z}]$  em ambos os lados da igualdade (1.17), usando a definição de esperança e o fato de que  $\bar{Z}$  não depende de  $z$  segue que

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(Z) + E[\bar{Z}] &= \min_{z \in \mathbb{R}} \left( z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L \max\{0, z_\ell - z\} \right) + E[\bar{Z}] \\ &= \min_{z \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L \max\{0, z_\ell - z\} \right) + \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \bar{z}_\ell \\ &= \min_{z \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (\bar{z}_\ell + z) + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L \max\{0, z_\ell - z\} \right), \end{aligned}$$



o que completa a prova. □

**Exemplo 1.25** A fim de exemplificar, considere uma variável aleatória  $Z$  que assume os valores 1, 2, 4 e 5 com probabilidades 0.2, 0.2, 0.4 e 0.2, respectivamente. Assim,

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 1 \\ 0.2 & \text{se } 1 \leq z < 2 \\ 0.4 & \text{se } 2 \leq z < 4 \\ 0.8 & \text{se } 4 \leq z < 5 \\ 1 & \text{se } z \geq 5. \end{cases}$$

Considere inicialmente  $\alpha = 0.4$ . A Figura 1.5 exibe do lado direito a distribuição de  $F(z)$ , os valores de  $VaR_{0.4}$  e  $CVaR_{0.4}$ , e do lado esquerdo o gráfico da função  $G$  (1.14).

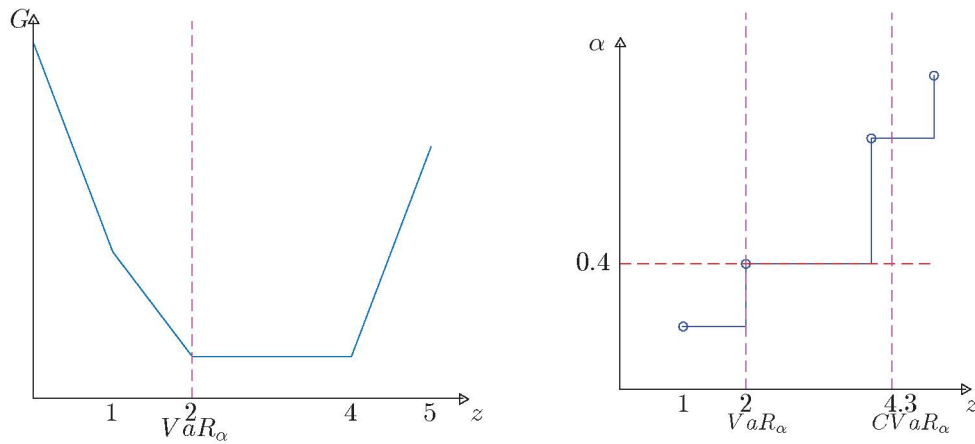


Figura 1.5: Gráfico da função  $G$  (esquerda) e gráfico da função de distribuição (direita).  
Fonte: A autora

Pelo gráfico da função  $G$  podemos ver que

$$\operatorname{argmin}_{z \geq 0} G(z) = [2, 4],$$

como provado no Teorema 1.23. Além disso, pela definição 1.17, temos que  $VaR_{0.4}$  é o menor dos minimizadores, logo  $VaR_{0.4} = 2$ . Temos então que  $\alpha = 0.4 = F(VaR_\alpha)$ .

Pela definição 1.6 e 1.7 temos que

$$CVaR_{0.4}^-(Z) = \frac{0.2 \times 2 + 0.4 \times 4 + 0.2 \times 5}{0.8} = 3.75$$

$$CVaR_{0.4}^+(Z) = \frac{0.4 \times 4 + 0.2 \times 5}{0.6} = 4.33.$$

Para calcular  $CVaR_{0.4}$  pela definição 1.21 precisamos definir a função  $\alpha$ -cauda. Para tanto considere sua função de distribuição

$$F_{0.4}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{2}{3} & \text{se } 4 \leq z < 5 \\ 1 & \text{se } z \geq 5. \end{cases}$$

Assim, sua função  $\alpha$ -cauda é dada por

$$f_{0.4}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{2}{3} & \text{se } z = 4 \\ \frac{1}{3} & \text{se } z = 5. \end{cases}$$

Pela Definição 1.19

$$CVaR_{0.4}(Z) = \frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 5 = 4.33.$$

Portanto, temos que

$$CVaR_{0.4}^-(Z) < CVaR_{0.4}(Z) = CVaR_{0.4}^+(Z),$$

o que está de acordo com a primeira situação do Teorema 1.22.

Considere agora  $\alpha = 0.6$ . Pela definição 1.17, temos que  $VaR_{0.6} = 4$ , assim  $\alpha = 0.6 < F(VaR_{0.6})$ . A Figura 1.6 exibe do lado direito a distribuição de  $F(z)$ , os valores de  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  e do lado esquerdo o gráfico da função  $G$  (1.14), para este caso. Vemos que

$$\underset{z \geq 0}{\operatorname{argmin}} G(z) = 4 = VaR_{0.6}.$$

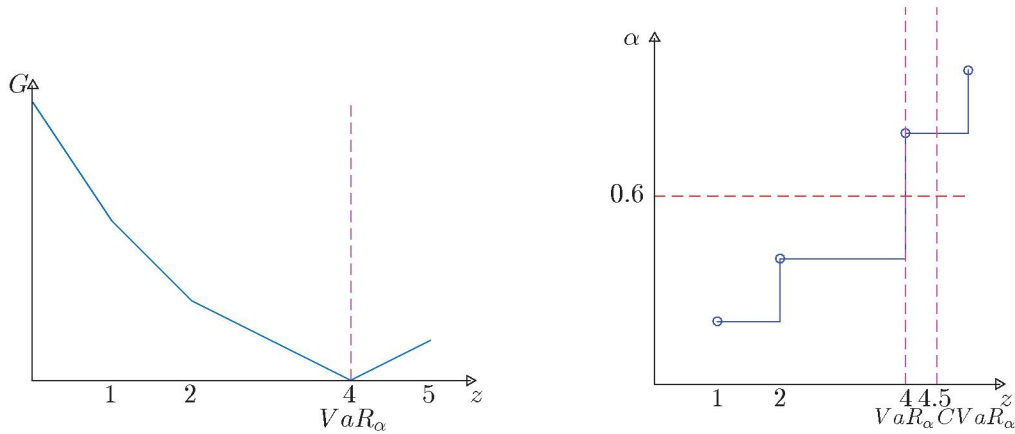


Figura 1.6: Gráfico da função  $G$  (esquerda) e gráfico da função de distribuição (direita).

Fonte: A autora

Pela definição 1.6 e 1.7 temos que

$$CVaR_{0.6}^-(Z) = \frac{0.4 \times 4 + 0.2 \times 5}{0.6} = 4.33.$$

$$CVaR_{0.6}^+(Z) = \frac{0.2 \times 5}{0.2} = 5.$$

Para calcular  $CVaR_{0.6}$  pela definição 1.21 precisamos definir a função  $\alpha$ -cauda. Para tanto considere sua função de distribuição

$$F_{0.6}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 4 \leq z < 5 \\ 1 & \text{se } z \geq 5. \end{cases}$$

Assim, sua função  $\alpha$ -cauda é dada por

$$f_{0.4}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } z = 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } z = 5. \end{cases}$$

Pela Definição 1.19

$$CVaR_{0.4}(Z) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 = 4.5.$$

Portanto, temos que

$$CVaR_{0.6}^-(Z) < CVaR_{0.6}(Z) < CVaR_{0.6}^+(Z),$$

o que está de acordo com a terceira situação do Teorema 1.22.

Para este caso, podemos também criar um evento fictício para que  $F(4) = 0.6$ , conforme ilustrado na Figura 1.7.

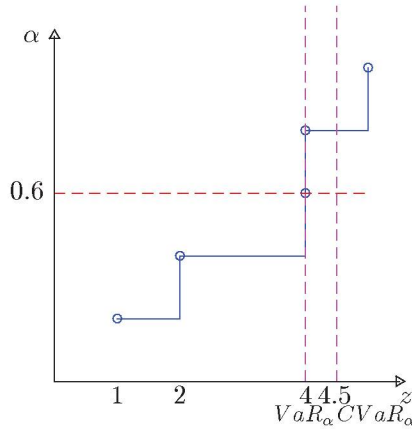


Figura 1.7: Gráfico da função de distribuição com evento fictício.

Fonte: A autora

Assim, recaímos no caso em que  $\alpha = F(VaR)$ , então podemos calcular  $CVaR$  a partir desta situação.

Pela definição 1.6 e 1.7 temos que

$$CVaR_{0.4}^-(Z) = \frac{0.2 \times 4 + 0.2 \times 4 + 0.2 \times 5}{0.6} = 4.33$$

$$CVaR_{0.4}^+(Z) = \frac{0.2 \times 4 + 0.2 \times 5}{0.4} = 4.5.$$

Para calcular  $CVaR_{0.6}$  pela definição 1.21 precisamos definir a função  $\alpha$ -cauda neste caso. Para tanto considere sua função de distribuição

$$F_{0.6}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{2}{3} & \text{se } 4 \leq z < 5 \\ 1 & \text{se } z \geq 5. \end{cases}$$

Desta forma, temos sua função  $\alpha$ -cauda

$$f_{0.6}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } z = 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } z = 5. \end{cases}$$



Pela Definição 1.19

$$CVaR_{0.6}(Z) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 = 4.5.$$

Portanto, temos que

$$CVaR_{0.6}^-(Z) < CVaR_{0.6}(Z) = CVaR_{0.6}^+(Z),$$

o que está de acordo com a primeira situação do Teorema 1.22.

Observe que em ambas as situações o valor do  $CVaR_{0.6}$  é o mesmo, mostrando que o evento fictício é apenas uma alternativa para os cálculos.

### 1.3 Problemas de interesse

Nesta tese estudamos problemas estocásticos de decisões sequenciais que se caracterizam pela necessidade de se tomar decisões em determinado período sem conhecimento completo quanto aos eventos que se realizarão em períodos futuros. Desta forma, esses problemas dependem de quantidades incertas, que podem ser modeladas por variáveis aleatórias. Uma das possíveis informações disponíveis sobre essas variáveis são suas realizações, ou seja, os valores que elas podem assumir.

Considere  $T$  estágios de decisão, em que em um determinado estágio  $t \in \{1, \dots, T\}$ , tendo sido revelada uma informação  $\xi_t$  em um conjunto  $\Xi_t$ , deve ser tomada uma decisão  $x_t \in \mathbb{R}^n$ . A informação  $\xi_t$  poderia ser, por exemplo, a realização de uma variável aleatória vetorial. Note que estamos considerando que uma decisão  $x_t \in \mathbb{R}^n$  deve ser tomada após a revelação de  $\xi_t$ . Esta situação, dita *aleatoriedade-decisão*, é a de interesse nesta tese e ocorre quando a decisão  $x_t$  pode depender de  $(\xi_1, \dots, \xi_t)$  mas não depende de  $(\xi_{t+1}, \dots, \xi_T)$ . Outra situação possível, conhecida como *decisão-aleatoriedade*, é aquela em que a decisão pode depender do passado, mas não depende nem do presente nem do futuro, ou seja, a decisão  $x_t$  deve ser tomada antes da revelação de  $\xi_t$ .

Suponha, por simplicidade, que existam  $L$  cenários  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_T)$  equiprováveis independentes das decisões tomadas. O subconjunto finito de  $\Xi_1 \times \dots \times \Xi_T$  desses  $L$  cenários será denotado por  $\Xi$ . Descrevemos a seguir um problema de interesse em que é fixado um cenário  $\xi \in \Xi$ .

#### Problema determinístico

Para cada cenário  $\xi \in \Xi$ , considere  $\Gamma = \Gamma(\xi) \subset \mathbb{R}^{nT}$  um conjunto fechado não vazio, que pode ser descrito por restrições. O problema determinístico consiste em obter  $x$  que minimize uma função custo  $f : \mathbb{R}^{nT} \rightarrow \mathbb{R}$ , com a restrição  $x \in \Gamma$ . Assim o problema determinístico é dado por

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1.18}$$

#### Problema estocástico não antecipativo

A função  $x(\cdot)$  que associa a cada  $\xi \in \Xi$ , um vetor de decisões sequenciais

$$x(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi), \dots, x_T(\xi)) \in \mathbb{R}^{nT}$$

é considerada uma política. Note que ao fixarmos um cenário, o problema determinístico fornece uma política com pleno conhecimento do passado, presente e futuro. Na prática isto não

ocorre. Em geral, temos informação sobre o passado e, talvez presente da variável aleatória e apenas um estudo estatístico do futuro.

Na definição de não antecipatividade de Rockafellar e Wets em [38], se dois cenários são idênticos nos primeiros  $t$  estágios, então as decisões associadas a esses cenários devem ser idênticas nesses  $t$  primeiros estágios. Nos problemas estudados nesta tese, assumimos que os cenários são idênticos somente no primeiro estágio, ou seja,  $\xi_1 = \xi'_1$  para todos cenários  $\xi, \xi' \in \Xi$ . Assim, devemos ter que a decisão do primeiro mês seja idêntica para toda política gerada, ou seja,

$$x_1(\xi) = x_1(\xi'), \quad \text{para todos cenários } \xi, \xi' \in \Xi, \quad (1.19)$$

caracterizando a restrição de não antecipatividade.

Considere uma função custo  $f : \mathbb{R}^{nT} \rightarrow \mathbb{R}$  e a variável aleatória  $f_{x,\xi}$ , que para cada escolha de  $x(\cdot)$ , associa a cada  $\xi \in \Xi$ , o valor da função  $f(x(\xi)) \in \mathbb{R}$ , ou seja:

$$f_{x,\xi} : \xi \in \Xi \rightarrow f(x(\xi)) \in \mathbb{R}.$$

O problema estocástico não antecipativo considera a minimização da esperança  $E[f_{x,\xi}]$  dessa variável aleatória em relação à variável de decisão  $x$ , de modo que seja não antecipativa e viável para todos os cenários considerados, ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && E[f_{x,\xi}] \\ & \text{sujeito a} && x(\xi) \in \Gamma(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \Xi \\ & && x_1(\xi) = x_1(\xi'), \quad \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Tendo em vista que consideramos  $L$  cenários equiprováveis  $\xi^1, \dots, \xi^\ell, \dots, \xi^L \in \Xi$ , a esperança da variável aleatória é

$$E[f_{x,\xi}] = \sum_{\xi \in \Xi} p(\xi) f(x(\xi)) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(x^\ell),$$

em que  $x^\ell$  representa  $x(\xi^\ell)$ . No que segue vamos denotar o vetor  $x^\ell \in \mathbb{R}^{nT}$  por  $(x_1, y^\ell)$ , com  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $y^\ell \in \mathbb{R}^{n(T-1)}$ . Assim, podemos interpretar o problema como um problema de dois estágios, sendo  $x_1$  a decisão do primeiro estágio e  $y^\ell$  a decisão dos demais. Desse modo, o problema estocástico ou não antecipativo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(x_1, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (\text{PNA})$$

em que  $\Gamma_\ell = \Gamma(\xi^\ell)$ . Enquanto o problema determinístico (1.18) tem  $nT$  variáveis, o problema PNA tem  $n + (T-1)nL$  variáveis.

Ao resolver o problema (PNA) estamos interessados apenas na decisão do primeiro estágio que é não antecipativa. Para obter uma política que seja não antecipativa para todos os  $T$  estágios, precisaremos repetir o processo a cada estágio. Fixada a decisão tomada no estágio  $t-1$ , considera-se no estágio  $t$ , cenários equiprováveis não antecipativos  $\xi_t = \xi'_t$  e resolve-se um novo problema (PNA). Esse processo, chamado de simulação, será explicado em detalhes na Seção 3.3.2 para o caso do problema prático de interesse dessa tese.

### Problema não antecipativo com aversão ao risco

A formulação do problema (PNA) assume que o tomador de decisão é neutro ao risco, no sentido de que custos elevados associados a alguns cenários podem ser compensados por custos baixos em outros cenários. No entanto, em algumas situações, o tomador de decisão é avesso ao risco e deseja se proteger contra custos muito elevados. Neste caso, é interessante substituir a esperança na função objetivo por uma medida de risco, como  $CVaR_\alpha$ , discutida na Seção 1.2.

#### Minimização de risco

Na Seção 1.2 definimos medidas de risco para um conjunto de cenários com custos dados. Agora definimos problemas de minimização de risco com as seguintes características:

- Um conjunto de  $L$  cenários  $\xi_i, i = 1, \dots, L$ , são fixos.
- Um conjunto viável  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  está associado a cada cenário.
- Uma função de custo  $x \in \Omega_i \mapsto z_i(x) \in \mathbb{R}_+^n$  está associada a cada cenário.
- Como antes, uma probabilidade  $p_i \in [0, 1]$  está associada a cada cenário.

Denote a interseção dos conjuntos viáveis por

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^L \Omega_i.$$

Dado  $x \in \Omega$ , uma distribuição  $F_{z_i}(\lambda)$  está associada a  $\{z_i(x), i = 1, \dots, L\}$  e as medidas de risco são definidas para  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$x \in \Omega \mapsto VaR_\alpha(x) \quad \text{e} \quad x \in \Omega \mapsto CVaR_\alpha(x)$$

onde  $VaR_\alpha(x)$  e  $CVaR_\alpha(x)$  são as medidas de risco para os custos  $\{z_i(x), i = 1, \dots, L\}$ . O problema de minimização de risco é

$$\underset{x \in \Omega}{\text{minimizar}} \quad CVaR_\alpha(x). \quad (1.21)$$

Usando o Teorema 1.23, este problema é equivalente a

$$\underset{x \in \Omega}{\text{minimizar}} \left\{ \min_{z \geq 0} G(x, z) \right\},$$

em que

$$G(x, z) = z + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{i=1}^L p_i [z_i(x) - z]^+.$$

Juntando essas expressões, o problema de minimização de risco (1.21) torna-se

$$\underset{z \geq 0, x \in \Omega}{\text{minimizar}} \quad z + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{i=1}^L p_i [z_i(x) - z]^+. \quad (1.22)$$

Utilizando a mesma notação usada no problema não antecipativo sem risco, dado  $\alpha \in (0, 1)$ , o problema não antecipativo com aversão ao risco é

$$\begin{aligned} &\underset{\text{sujeito a}}{\text{minimizar}} \quad CVaR_\alpha[f_{x,\xi}] \\ &\quad x(\xi) \in \Gamma(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \Xi \\ &\quad x_1(\xi) = x_1(\xi'), \quad \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi. \end{aligned} \quad (1.23)$$



Considerando a notação de (PNA), os  $L$  cenários equiprováveis, e o problema de minimização de risco (1.22), o problema (1.23) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L \max\{0, f(x_1, y^\ell) - z\} \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Denotando  $g_\ell = \max\{0, f(x_1, y^\ell) - z\}$  o problema anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L g_\ell \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell - f(x_1, y^\ell) + z \geq 0 & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Este problema é praticamente  $L$  vezes maior que o determinístico e procura minimizar a média dos maiores custos associados aos cenários. Na próxima seção discutiremos uma estratégia para identificar quais são os cenários associados a esses maiores custos sem precisar resolver o problema todo, de modo a reduzir o conjunto de cenários e consequentemente a dimensão do problema não antecipativo com aversão ao risco. Mas antes veremos uma estratégia que combina a esperança com  $CVaR$  para a inclusão de risco ao problema. Esta estratégia pode ser útil para o tomador de decisão ponderar a inclusão de risco no problema.

### Problema com aversão ao risco como combinação convexa da esperança e de $CVaR$

Em [40] Shapiro apresenta, no contexto do PDDE para multiestágios, uma medida coerente de risco dada pela combinação convexa da esperança e  $CVaR_\alpha$ . Ou seja, dado  $\beta \in [0, 1]$ , ao invés de minimizar a esperança como em (1.20), considera-se o seguinte problema não antecipativo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad (1-\beta) E[f_{x,\xi}] + \beta CVaR_\alpha(f_{x,\xi}) \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & x(\xi) \in \Gamma(\xi), & \text{para todo } \xi \in \Xi \\ & x_1(\xi) = x_1(\xi'), & \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Note que se  $\beta = 0$ , este problema se reduz a (1.20) e se  $\beta = 1$ , ele se reduz a (1.23).

Como visto na Seção 1.2,  $CVaR_\alpha$  é uma medida de risco, sendo assim satisfaz algumas propriedades, dentre elas a propriedade de homogeneidade positiva, ou seja,

$$\beta CVaR_\alpha(f_{x,\xi}) = CVaR_\alpha(\beta f_{x,\xi}).$$

Sabemos que esta propriedade é válida também para a esperança, e assim,

$$(1-\beta) E[f_{x,\xi}] = E[(1-\beta) f_{x,\xi}].$$

Desta forma, dado  $\beta \in [0, 1]$ , o problema (1.25) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad E[(1-\beta) f_{x,\xi}] + CVaR_\alpha(\beta f_{x,\xi}) \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & x(\xi) \in \Gamma(\xi), & \text{para todo } \xi \in \Xi \\ & x_1(\xi) = x_1(\xi'), & \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Usando o Lema 1.24 com  $Z = \beta f_{x,\xi}$  e  $\bar{Z} = (1-\beta) f_{x,\xi}$ , o problema (1.26) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (1-\beta) f(x_1, y^\ell) + z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L g_\ell \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell - \beta f(x_1, y^\ell) + z \geq 0, & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.27)$$

## 1.4 Cenários irrelevantes

Uma redução do número de cenários passa pela definição de cenários irrelevantes [1, 32], ou seja, daqueles que podem ser considerados com probabilidade nula de ocorrência na resolução do problema (1.24) sem alterar o valor ótimo da função objetivo.

**Definição 1.26** *Seja  $\Xi$  um conjunto de cenários com  $\xi_1 = \xi'_1$  para todo  $\xi, \xi' \in \Xi$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Considere  $\Xi' \subset \Xi$  um subconjunto de cenários,  $D = \Xi \setminus \Xi'$  e as probabilidades*

$$p'(\xi) = \begin{cases} \frac{p(\xi)}{1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}, & \xi \in \Xi' \\ 0, & \xi \in D \end{cases}.$$

Seja

$$\alpha' = \frac{\alpha - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}{1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}.$$

Quando o valor ótimo do problema (1.23) é igual ao valor ótimo do problema reduzido

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad CVaR_{\alpha'}[f_{x,\xi}] \\ & \text{sujeito a} \quad x(\xi) \in \Gamma(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \Xi \\ & \quad \quad \quad x_1(\xi) = x_1(\xi'), \quad \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi', \end{aligned} \quad (1.28)$$

dizemos que os cenários em  $D$  são irrelevantes para o problema (1.23).

Em particular, no nosso caso, em que  $\Xi$  tem  $L$  cenários equiprováveis, tomamos um subconjunto  $\Xi' \subset \Xi$  com  $q$  cenários equiprováveis, em que  $q$  é natural no intervalo  $((1-\alpha)L, L)$ . Assim,

$$p'(\xi) = \begin{cases} 1/q, & \xi \in \Xi' \\ 0, & \xi \in D \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha' = \frac{q - (1-\alpha)L}{q}.$$

**Observação 1.27** *A restrição de viabilidade  $x(\xi) \in \Gamma(\xi)$  para todo  $\xi \in \Xi$  em (1.28), impede a redução do tamanho do problema. Para contornar essa dificuldade, o que se propõe é resolver o problema (1.28) com a restrição  $x(\xi) \in \Gamma(\xi)$  para todo  $\xi \in \Xi'$  e em seguida verificar se a solução obtida é viável para todos os demais cenários de  $D = \Xi \setminus \Xi'$ . Se esta solução for viável para todos os cenários, o conjunto  $D$  foi encontrado, caso contrário, redefinimos  $D$ . A estratégia para obtenção deste conjunto irrelevante será feita com detalhes na Seção 4.9.*

O parâmetro  $\alpha'$  é definido de modo que a quantidade de cenários utilizados para calcular  $CVaR_{\alpha'}$  coincida com a quantidade utilizada para determinar  $CVaR_{\alpha}$ . O próximo teorema permite caracterizar um conjunto de cenários irrelevantes a partir da medida  $VaR_{\alpha}$ .

**Teorema 1.28** *Seja  $x^* \in \mathbb{R}^{nT}$  uma solução do problema (1.23) e considere o conjunto*

$$D = \{\xi \in \Xi \mid f(x^*(\xi)) \leq VaR_{\alpha}[f_{x^*,\xi}]\}.$$

Então, os cenários no conjunto  $D$  são irrelevantes para o problema (1.23).

*Demonstração.* Segue de [1, Thm.2]. □

Por este teorema a caracterização de  $D$  requer conhecimento da solução ótima  $x^*$ , e que obviamente não é conhecida. A ideia é portanto obter uma aproximação para  $x^*$  a partir da qual possamos ter uma aproximação para o conjunto  $D$ . Estratégias para calcular essa aproximação, no nosso problema de aplicação, serão discutidas no Capítulo 4.

**Teorema 1.29** *Seja  $\Xi$  um conjunto de cenários com  $\xi_1 = \xi'_1$  para todo  $\xi, \xi' \in \Xi$  e  $\alpha = F(VaR_\alpha) \in (0, 1)$ . Considere  $\Xi' \subset \Xi$  um subconjunto de cenários,  $D = \Xi \setminus \Xi'$  e as probabilidades*

$$p'(\xi) = \begin{cases} \frac{p(\xi)}{1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}, & \xi \in \Xi' \\ 0, & \xi \in D \end{cases}.$$

*Defina*

$$\alpha' = \frac{\alpha - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}{1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)}.$$

*Seja  $\bar{x} \in \Gamma(\xi)$ , para todo  $\xi \in \Xi$ , uma solução do problema (1.28). Se  $f(\bar{x}(\xi)) \leq VaR_{\alpha'}[f_{\bar{x}, \xi}]$ , para todo  $\xi \in D$ , então  $\bar{x}$  é solução do problema (1.23).*

*Demonstração.* Usando a hipótese e o fato que  $\alpha' \leq \alpha$ , temos pela Definição 1.4 que para todo  $\xi \in D$

$$f(\bar{x}(\xi)) \leq VaR_{\alpha'}[f_{x, \xi}] \leq VaR_\alpha[f_{x, \xi}].$$

Usando a Proposição 1.21 e isto temos que

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha[f_{\bar{x}, \xi}] &= CVaR_\alpha^+[f_{\bar{x}, \xi}] = E[f(\bar{x}(\xi)) \mid f(\bar{x}(\xi)) > VaR_\alpha[f_{\bar{x}, \xi}]] \\ &= \sum_{\xi \in \Xi'} p(\xi) f(\bar{x}(\xi)) \\ &= \left(1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)\right) \sum_{\xi \in \Xi'} \frac{p(\xi)}{1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)} f(\bar{x}(\xi)) \\ &= \left(1 - \sum_{\xi \in D} p(\xi)\right) CVaR_{\alpha'}[f_{\bar{x}, \xi}]. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima, o fato que  $\bar{x}$  é uma solução do problema (1.28) e  $\alpha' \leq \alpha$ , segue que, para  $x \in \Gamma(\xi)$  para todo  $\xi \in \Xi$ ,

$$CVaR_\alpha[f_{\bar{x}, \xi}] \leq CVaR_{\alpha'}[f_{\bar{x}, \xi}] \leq CVaR_{\alpha'}[f_{x, \xi}] \leq CVaR_\alpha[f_{x, \xi}].$$

Usando isto e o fato que  $\bar{x}$  é uma solução do problema (1.28), segue que  $\bar{x}$  é solução do problema (1.23) e concluímos a prova.  $\square$

## Capítulo 2

# Algoritmo Progressive Hedging

No capítulo anterior foram discutidos os problemas estocásticos de decisões sequenciais de interesse dessa tese, em que a estocasticidade é tratada através de análise de cenários. Fixado um cenário, recaímos num problema determinístico e assumimos que temos um algoritmo capaz de resolvê-lo. Ao considerarmos um conjunto de  $L$  cenários, temos o problema (PNA) em que desejamos obter uma solução não antecipativa. Este problema é praticamente  $L$  vezes maior que o determinístico. Dependendo do número de cenários considerados, o algoritmo que resolve o problema determinístico pode ser usado para resolver o problema não antecipativo. No entanto, se o número de cenários é muito grande pode ser necessário fazer uso de um algoritmo que permita sua paralelização, como o algoritmo Progressive Hedging proposto por Wets em [43]. A ideia central desse método consiste em decompor o problema (PNA) em subproblemas menores, de forma que as soluções individuais para cada cenário sejam combinadas para calcular uma solução ótima não antecipativa do problema original.

Este capítulo é dedicado ao Algoritmo Progressive Hedging que será aplicado a um problema de planejamento hidrotérmico como veremos nos próximos capítulos. Na Seção 2.1 apresentamos o algoritmo Progressive Hedging. Na Seção 2.2, o algoritmo é adaptado de forma a resolver o problema não antecipativo com aversão ao risco.

### 2.1 Algoritmo

Como vimos na Seção 1.3, estamos interessados em problemas estocásticos de decisões sequenciais. Consideramos  $T$  estágios de decisão, em que em um determinado estágio  $t \in \{1, \dots, T\}$  deve ser tomada uma decisão  $x_t \in \mathbb{R}^n$ , após ter sido revelada uma informação  $\xi_t \in \Xi_t$ . Denotamos  $\Xi = \Xi_1 \times \dots \times \Xi_T$ . Assumimos, por simplicidade, que existem  $L$  cenários equiprováveis  $\xi^1, \dots, \xi^L \in \Xi$ , com  $\xi_1^\ell = \xi_1^1$  para todo  $\ell \in \{2, \dots, L\}$ . Estamos particularmente interessados na decisão  $x_1$  do primeiro estágio que seja não antecipativa, ou seja,  $x_1 = x_1^\ell$ , para todo  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . Assim, essa decisão é tomada como uma solução do problema não antecipativo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(x_1, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L, \end{aligned} \tag{PNA}$$

em que  $y^\ell = y(\xi^\ell) = (x_2^\ell, \dots, x_T^\ell) \in \mathbb{R}^{n(T-1)}$  e  $\Gamma_\ell = \Gamma(\xi^\ell)$  é o conjunto viável que depende do cenário. Note que esse problema tem  $n + n(T-1)L$  variáveis.

Nesta seção discutimos o método Progressive Hedging (PH) proposto por Wets em [43] para resolver esse problema que o decompõe em  $L$  problemas. A condição de não antecipativi-



dade da decisão do primeiro estágio pode ser escrita como

$$x_1^\ell = x_1^1, \quad \text{para todo } \ell = 2, \dots, L.$$

Essas igualdades podem ser reescritas também considerando a média das variáveis, ou seja,

$$x_1^\ell = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_1^i, \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, L. \quad (2.1)$$

Desse modo, o problema (PNA) equivale a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(x_1^\ell, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} \quad (x_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad \quad x_1^\ell = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_1^i, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Este problema tem agora  $nTL$  variáveis, ou seja,  $n(L-1)$  variáveis a mais que (PNA). No entanto, nos permite decompor o problema em subproblemas. Para tanto, o algoritmo Progressive Hedging considera uma meta  $\hat{x}$  para a média dessas  $L$  variáveis  $x_1^\ell$  e atualiza-a iterativamente. Dado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , consideramos o problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(x_1^\ell, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} \quad (x_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad \quad x_1^\ell = \hat{x}, \quad \ell = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (2.2)$$

que pode agora ser decomposto em  $L$  problemas. Ou seja, para cada  $\ell = 1, \dots, L$ , consideramos um problema da forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad f(x_1^\ell, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} \quad (x_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell \\ & \quad \quad \quad x_1^\ell = \hat{x}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A introdução da meta  $\hat{x}$  permitiu a decomposição do problema. Essa meta é a grande responsável pelo acoplamento dos  $L$  problemas, que como dissemos acima, será atualizada iterativamente pelo algoritmo.

A restrição de acoplamento, que em geral é inviável, é tratada na função objetivo do problema (2.3), penalizando-a como nos métodos de Lagrangiano Aumentado, discutido por Nocedal e Wright em [26]. Assim, dado um parâmetro de penalidade  $\rho > 0$ , considere, para cada cenário  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , a função  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{nT} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathcal{L}((x_1^\ell, y^\ell), w^\ell) = f(x_1^\ell, y^\ell) + (w^\ell)^T (x_1^\ell - \hat{x}) + \frac{\rho}{2} \|x_1^\ell - \hat{x}\|^2, \quad (2.4)$$

em que  $w^\ell \in \mathbb{R}^n$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de acoplamento  $x_1^\ell = \hat{x}$ .

Dada uma meta inicial  $\hat{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  e uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange  $(w^\ell)^0 \in \mathbb{R}^n$ , o Algoritmo Progressive Hedging resolve, em cada iteração,  $L$  problemas de minimização da função Lagrangiana (2.4) associada a cada cenário  $\ell$  no conjunto  $\Gamma_\ell$ . Esses problemas são independentes e podem ser resolvidos paralelamente. A meta para a próxima iteração é calculada, com base em (2.1), como a média das soluções desses problemas e os multiplicadores são atualizados de acordo com os métodos de Lagrangiano Aumentado. A atualização do parâmetro de penalidade requer uma discussão à parte que será apresentada logo após o algoritmo.

### Algoritmo 2.1 *Progressive Hedging*

*Dados:*  $\rho_1 = 0$ ,  $\hat{x}^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$  e  $(w^\ell)^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$  para todo  $\ell = 1, \dots, L$ .

$k = 1$

*Repita*

*Para cada cenário  $\ell$ , calcule*

$$(x_1^\ell, y^\ell)^k \in \operatorname{argmin}_{(x_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell} \left\{ f(x_1^\ell, y^\ell) + \left( (w^\ell)^{k-1} \right)^T x_1^\ell + \frac{\rho_k}{2} \|x_1^\ell - \hat{x}^{k-1}\|^2 \right\}$$

$$\hat{x}^k = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (x_1^\ell)^k$$

*Para cada  $\ell$*

$$(w^\ell)^k = (w^\ell)^{k-1} + \rho_k ((x_1^\ell)^k - (\hat{x})^k)$$

*Atualiza  $\rho_{k+1} > 0$*

$k = k + 1$

Alguns passos do algoritmo merecem discussão, como veremos a seguir.

#### Atualização do parâmetro de penalidade

O PH é um dos métodos de decomposição de cenários mais populares na programação estocástica de multiestágio, segundo Bastin e Zehtabian, [2]. Embora alcance uma decomposição completa em relação aos cenários, sua eficiência permanece sensível a algumas opções de implementação. Em particular, o desempenho do algoritmo está relacionado ao valor do parâmetro de penalidade  $\rho$ . Nesta seção apresentamos uma discussão sobre possibilidades para sua atualização.

Em [38], Rockafellar e Wets propõem o método PH e estabelecem sua convergência com o parâmetro de penalidade constante. No entanto, vários autores propuseram diferentes estratégias para atualizá-lo e observaram que, na prática, a escolha deste parâmetro de penalidade tem grande impacto no comportamento numérico do algoritmo.

No Algoritmo 2.1, o parâmetro  $\rho_1$  é fixado nulo na primeira iteração. Nas demais iterações, o parâmetro pode ser atualizado como veremos a seguir.

Em [12] os autores consideram uma sequência crescente  $(\rho_k)$ , ou seja, dados  $\rho_2 > 0$  e  $\tau \geq 1$ , a sequência é gerada por

$$\rho_{k+1} = \tau \rho_k, \quad \text{para todo } k \geq 2. \quad (2.5)$$

Mulvey e Vladimirov mostram em [23] que a taxa geral de convergência do PH é particularmente sensível à escolha do parâmetro de penalidade. Eles sugerem considerar uma sequência com um valor pequeno e a cada iteração ter um aumento dinâmico com uma possível redução repentina, ou seja, dados  $\rho_2 > 0$ ,  $\tau \geq 1$  e  $0 < \mu \leq 1$ , a sequência é atualizada por

$$\rho_{k+1} = (\tau \rho_k)^\mu, \quad \text{para todo } k \geq 2. \quad (2.6)$$

Considerando valores decrescentes para o parâmetro de penalidade, os autores de [33] sugerem que a cada iteração o decrescimento do parâmetro de penalidade esteja relacionado com o número de iteração do algoritmo, ou seja, dados  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ,

$$\rho_{k+1} = \frac{1}{\alpha + \beta(k+1)}, \quad \text{para todo } k \geq 1. \quad (2.7)$$

Existem outras estratégias para atualizar o parâmetro de penalidade [2], mas não há consenso até o momento de qual seria mais eficiente, pois isto pode depender inclusive de características do problema considerado.

## Média dos multiplicadores de Lagrange

O próximo resultado, enunciado em [43], garante que a média dos multiplicadores de Lagrange em relação aos cenários é nula ao longo das iterações.

**Proposição 2.2** *Considere  $((w^\ell)^k)$  a sequência de multiplicadores de Lagrange gerada pelo Algoritmo 2.1, associada a cada cenário  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . Então, para todo  $k \geq 0$*

$$\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^k = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

*Demonstração.* A prova será feita por indução em  $k$ . Para  $k = 0$  temos, pelo algoritmo que  $(w^\ell)^0 = 0$ , para todo  $\ell = 1, \dots, L$ , assim  $\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^k = 0$ . Assuma agora, a hipótese de indução, que  $\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^{k-1} = 0$ . Usando isto e a regra de atualização dos multiplicadores  $(w^\ell)^k - (w^\ell)^{k-1} = \rho_k((x_1^\ell)^k - \hat{x}^k)$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^k &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^k - \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (w^\ell)^{k-1} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L [(w^\ell)^k - (w^\ell)^{k-1}] \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L [\rho_k((x_1^\ell)^k - \hat{x}^k)] \\ &= \rho_k \left[ \underbrace{\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (x_1^\ell)^k}_{\hat{x}^k} - \hat{x}^k \underbrace{\sum_{\ell=1}^L \frac{1}{L}}_1 \right] \\ &= \rho_k \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

completando a demonstração. □

## A meta calculada pode ser inviável para o problema original em uma iteração

Para cada cenário  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , defina o conjunto

$$\Omega_\ell = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists y^\ell \text{ com } (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell\},$$

e

$$\Omega = \bigcap_{\ell=1}^L \Omega_\ell.$$

Dado  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ ,  $(x_1^\ell)^k$  é viável para o problema (2.3), ou seja  $(x_1^\ell, y^\ell)^k \in \Gamma_\ell$ , e consequentemente  $(x_1^\ell)^k \in \Omega_\ell$ . No entanto a meta, obtida como a média dessas decisões particulares, pode não ser viável para todos os cenários, ou seja,  $\hat{x}^k \notin \Omega$ .

À medida que as iterações aumentam, a expectativa é de que a restrição de não antecipatividade force que as decisões  $(x_1^\ell)^k$  se aproximem entre si, independente do cenário, forçando a viabilidade aproximada da meta  $\hat{x}^k$ .



## Critério de parada do algoritmo

A meta  $\hat{x}^k$  é calculada iterativamente como a média das decisões do primeiro estágio obtidas pela resolução do problema de minimizar (2.4) em  $\Gamma_\ell$ , para cada  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . A expectativa é de que ao longo das iterações essa meta se aproxime da decisão do primeiro estágio independente do cenário. Assim, como considerado na literatura [39, 43], dado  $\varepsilon > 0$ , o algoritmo para com sucesso quando em uma iteração  $k$ , o seguinte critério é satisfeito:

$$\|(x_1^\ell)^k - \hat{x}^{k-1}\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \ell \in \{1, \dots, L\}. \quad (2.8)$$

Há outros critérios de parada possíveis. Rockafellar e Wets, em [38], utilizam como critério a norma da diferença da variação dos multiplicadores de Lagrange entre iterações consecutivas. Preferimos adotar o critério de parada dado em (2.8) pois a atualização dos multiplicadores de Lagrange depende explicitamente do parâmetro de penalidade, cuja atualização não é consensual.

Na próxima seção discutimos adaptações ao algoritmo Progressive Hedging de modo a resolver o problema de minimização de  $CVaR_\alpha$ .

## 2.2 Inclusão de aversão ao risco

Nesta seção adaptamos o algoritmo PH visando sua aplicação na resolução de problemas da forma (1.24) de minimização de  $CVaR_\alpha$ . A minimização de medidas de risco, como o  $CVaR_\alpha$  apresenta um obstáculo para a aplicação do algoritmo PH que é a falta de separabilidade. A introdução de variáveis adicionais ajudará a contornar este obstáculo. Assim, nesta seção, baseada em [36], mostramos como o algoritmo PH pode ser aplicado para resolver problemas da forma (1.24) através da introdução de variáveis adicionais que, como as metas, discutidas na seção anterior, serão atualizadas iterativamente através da média de soluções obtidas para cada cenário.

Inicialmente, de maneira análoga à considerada para resolver o problema (PNA) com o método PH, dada uma meta  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , o acoplamento entre as soluções para os problemas para cada cenário é realizado através das restrições de não antecipatividade da decisão do primeiro estágio como  $x_1^\ell = \hat{x}$ , para todo  $\ell = 1, \dots, L$ . Assim, dado  $\alpha \in (0, 1)$ , essas restrições são incorporadas ao problema (1.24) que se escreve como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L g_\ell \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & (x_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & x_1^\ell = \hat{x}, & \ell = 1, \dots, L, \\ & g_\ell - f(x_1^\ell, y^\ell) + z \geq 0 & \ell = 1, \dots, L, \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para aplicar o algoritmo de Progressive Hedging para resolver o problema (2.9), precisamos ter a separabilidade por cenários. Note que temos o mesmo  $z$  para todos os cenários, impedindo a separabilidade em subproblemas. A estratégia é então criar uma variável adicional  $z^\ell$  para cada cenário  $\ell \in \{1, \dots, L\}$  e obrigar que essas variáveis coincidam através de restrições de não antecipatividade análogas à variável de decisão do primeiro estágio. Reescreveremos então, as restrições de não antecipatividade considerando uma meta  $(\hat{x}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  para as variáveis primais e obrigando que

$$(x_1^\ell, z^\ell) = (\hat{x}, \hat{z}), \quad \text{para todo } \ell = 1, \dots, L.$$



As restrições de desigualdade do problema (2.9), que não são de caixa, são reescritas como igualdades com a inclusão de variáveis de folga. Assim, após a introdução dessas variáveis adicionais, o problema (2.9) é reescrito nas variáveis  $((x_1^\ell, y^\ell), z^\ell) \in \mathbb{R}^{nT+1}$  como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell \right) \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} (x_1^\ell, y^\ell) &\in \Gamma_\ell, & \ell &= 1, \dots, L \\ x_1^\ell &= \hat{x}, & \ell &= 1, \dots, L \\ z^\ell &= \hat{z}, & \ell &= 1, \dots, L \\ g_\ell - f(x_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell &= 0, & \ell &= 1, \dots, L \\ g_\ell &\geq 0, & \ell &= 1, \dots, L \\ s^\ell &\geq 0, & \ell &= 1, \dots, L. \end{aligned} \end{aligned}$$

De modo análogo à seção anterior, as restrições de não antecipatividade são tratadas através de métodos de penalidade como o Lagrangiano aumentado. Assim, para cada  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , considere a função  $\mathcal{L}_\alpha : \mathbb{R}^{nT} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha((x_1^\ell, y^\ell), z^\ell, w^\ell, u^\ell) &= \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell + (w^\ell)^T (x_1^\ell - \hat{x}) \\ &+ (u^\ell)(z^\ell - \hat{z}) + \frac{\rho}{2} \|x_1^\ell - \hat{x}\|^2 + \frac{\rho}{2} (z^\ell - \hat{z})^2, \end{aligned}$$

em que  $w^\ell \in \mathbb{R}^n$  e  $u^\ell \in \mathbb{R}$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de não antecipatividade das variáveis  $x_1^\ell$  e  $z^\ell$ , respectivamente. Analogamente à Seção 2.1, dados  $\rho > 0$ ,  $\hat{x}^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{z}^0 = 0 \in \mathbb{R}$ ,  $(u^\ell)^0 = 0 \in \mathbb{R}$  e  $(w^\ell)^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$  para todo  $\ell = 1, \dots, L$ , o algoritmo Progressive Hedging calcula em cada iteração  $k$ :

- Variáveis  $((x_1^\ell, y^\ell)^k, (z^\ell)^k)$  como argumento da minimização do problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \mathcal{L}_{\alpha,k}((x_1^\ell, y^\ell), z^\ell, (w^\ell)^{k-1}, (u^\ell)^{k-1}) \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} (x_1^\ell, y^\ell) &\in \Gamma_\ell, \\ g_\ell - f(x_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell &= 0, \\ g_\ell(z^\ell) &\geq 0, \\ s^\ell &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned} \tag{2.10}$$

- Metas atualizadas da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix}^k = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \begin{pmatrix} x_1^\ell \\ z^\ell \end{pmatrix}^k.$$

- Multiplicadores de Lagrange atualizados por

$$\begin{pmatrix} w^\ell \\ u^\ell \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} w^\ell \\ u^\ell \end{pmatrix}^{k-1} + \rho \begin{pmatrix} x_1^\ell - \hat{x} \\ z^\ell - \hat{z} \end{pmatrix}^k.$$

- Parâmetro de penalidade  $\rho$  pode ser atualizado de diferentes maneiras como discutido na Seção 2.1.

Sintetizamos a seguir o algoritmo Progressive Hedging para resolver o problema (2.9).

**Algoritmo 2.3** *Progressive Hedging para minimização de  $CVaR_\alpha$*

*Dados:*  $\rho_1 = 0$ ,  $\hat{x}^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{z}^0 = 0 \in \mathbb{R}$ ,  
 $(u^\ell)^0 = 0 \in \mathbb{R}$  e  $(w^\ell)^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ , para todo  $\ell = 1, \dots, L$ .

$k = 1$

*Repita*

*Para cada*  $\ell \in \{1, \dots, L\}$

*Encontre*  $((x_1^\ell, y^\ell)^k, (z^\ell)^k)$  *uma solução do problema (2.10)*

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix}^k = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \begin{pmatrix} x_1^\ell \\ z^\ell \end{pmatrix}^k$$

*Para cada*  $\ell \in \{1, \dots, L\}$

$$\begin{pmatrix} w^\ell \\ u^\ell \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} w^\ell \\ u^\ell \end{pmatrix}^{k-1} + \rho_k \begin{pmatrix} x_1^\ell - \hat{x} \\ z^\ell - \hat{z} \end{pmatrix}^k$$

*Atualize*  $\rho_{k+1} > 0$

$k = k + 1$

Para cada cenário fixado, uma solução  $((x_1^\ell, y^\ell)^k, (z^\ell)^k)$  do problema (2.10) pode ser obtida através do mesmo algoritmo usado para obter uma solução do problema determinístico (1.18).

No próximo capítulo apresentamos o problema prático de interesse dessa tese em que aplicaremos os algoritmos estudados neste capítulo.

## Capítulo 3

# O problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos

Neste capítulo apresentamos os problemas de interesse dessa tese vistos na Seção 1.3, mas agora na situação prática do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos em que as afluições são as responsáveis pela aleatoriedade do problema. A Seção 3.1 é dedicada à contextualização do problema prático [5, 22, 24]. São apresentadas algumas características importantes do Setor Elétrico Brasileiro e do Sistema Interligado Nacional, são destacadas algumas propriedades de funcionamento das usinas hidroelétricas e termoelétricas abordadas por Kleina em [17], e é feita uma breve descrição de como o problema tem sido usualmente resolvido [4]. Na seção 3.2, é apresentado o modelo determinístico como um problema de programação não linear, seguindo as ideias de [20], em que é considerado fixado um cenário de afluência. São descritos os dados, as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições do problema. Na Seção 3.3, discutimos algumas particularidades [31] do problema não antecipativo discutido na Seção 1.3 para o caso do problema de planejamento da operação. Apresentamos uma representação dos cenários de afluições fornecidos pelos autores de [9] e para um cenário de simulação dado descrevemos como uma política não antecipativa associada a este cenário é determinada. Por fim, na Seção 3.4 são analisadas três alternativas para inclusão de aversão ao risco no caso particular do problema do planejamento, conforme [6, 40].

### 3.1 Contextualização

O Setor Elétrico Brasileiro (SEB) é constituído por um parque hidro-termo-eólico de geração cuja matriz energética baseia-se predominantemente na geração hidráulica. No entanto, outras fontes de energia como solar, nuclear e biomassa contribuem na geração de energia do Sistema Interligado Nacional (SIN). A Figura 3.1 mostra a capacidade do SIN das diferentes fontes de geração de energia. Cerca de 65% da geração de energia elétrica corresponde à geração em aproveitamentos hidroelétricos. Mesmo com o crescimento das novas fontes de geração de energia, as usinas hidroelétricas e termoelétricas são ainda responsáveis por 78,9% da capacidade instalada do SIN. Embora as usinas eólicas representem cada vez mais uma fonte importante de energia, nesta tese iremos focar nossa atenção nas usinas hidroelétricas e termoelétricas, visto que no problema de interesse a energia gerada por usinas eólicas poderiam ser consideradas descontando-se da demanda.

As usinas hidroelétricas funcionam através da pressão da água que gira a turbina, transformando a energia potencial, obtida do armazenamento de água em reservatórios, em energia cinética quando esta é conduzida sob pressão através do conduto forçado ao conjunto das turbinas. As turbinas absorvem a energia cinética do fluxo de água, transformando-a em energia

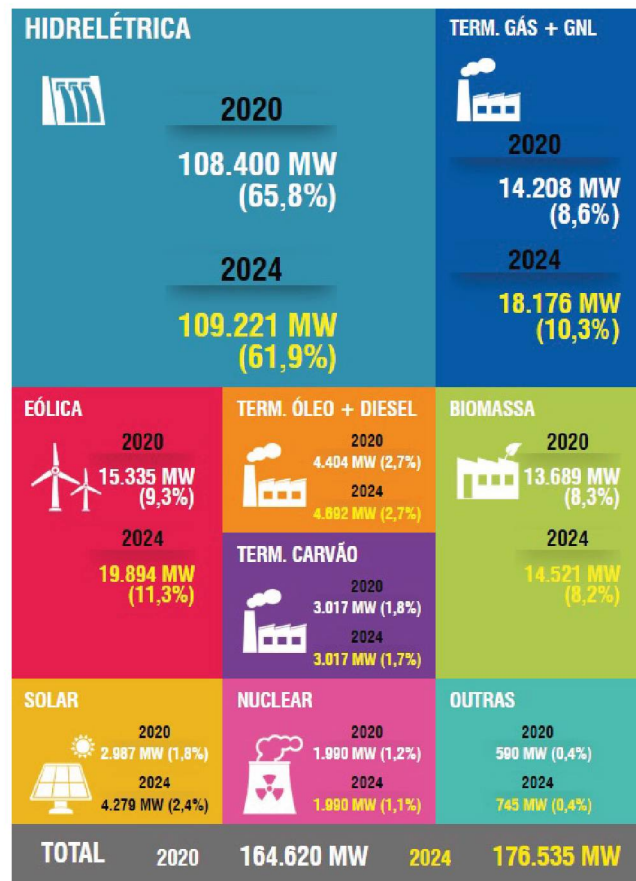


Figura 3.1: Capacidade Instalada do SIN- 2020/2024.  
Fonte: ONS (2019)

mecânica. Finalmente, esta energia é transmitida através de um eixo ao gerador que por sua vez a transforma em energia elétrica. A água segue então para o rio pelo canal de fuga. A Figura 3.2 dá uma ideia do trajeto realizado pela água a fim de gerar energia. Cada elemento deste trajeto influencia de alguma maneira o planejamento da operação.

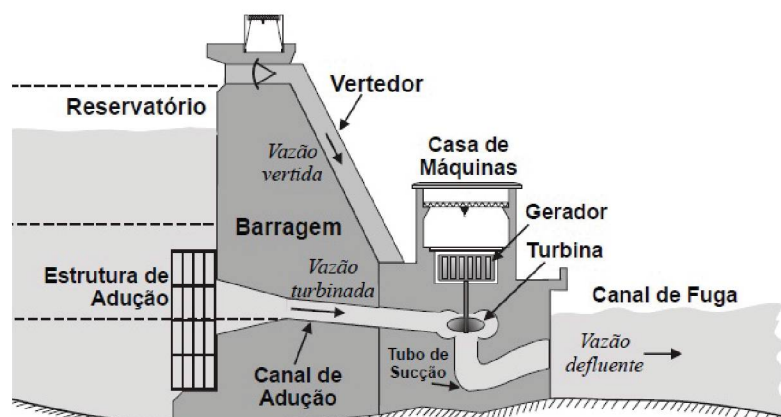


Figura 3.2: Componentes de uma usina hidroelétrica.  
Fonte: Adaptado de [42]

Nas usinas termoeletricas, a energia elétrica é obtida através da transformação de energia térmica em energia mecânica para movimentação de uma turbina acoplada a um gerador.



São vários os tipos de usinas termoeletricas, a diferença entre elas está na forma com que a energia térmica é gerada, ou seja, que tipo de combustível é utilizado e como este é queimado. Alguns dos combustíveis utilizados são: carvão mineral, óleo, gás natural e biomassa [17]. A forma com que o combustível é queimado resulta em outra divisão das usinas termoeletricas: usinas com turbinas a vapor, usinas com turbinas a gás e usinas de combustão direta. Por exemplo, a Figura 3.3 mostra o esquema simplificado de uma usina com turbinas a vapor, onde o combustível é queimado para fornecer calor a uma caldeira, e então a água é aquecida e transformada em vapor que, sob pressão, movimenta uma turbina.

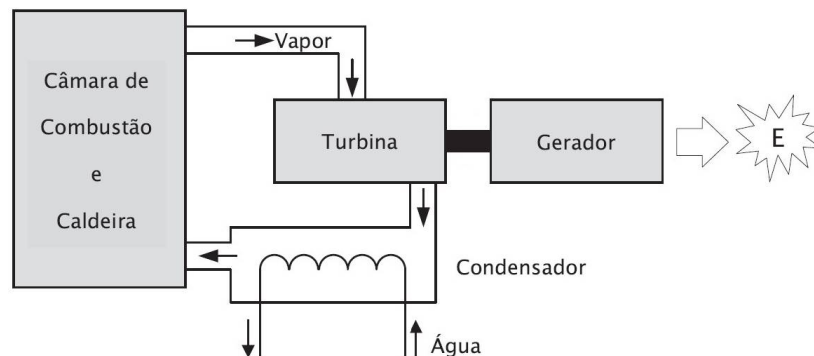


Figura 3.3: Esquema simplificado de uma usina térmica a vapor.

Fonte: Adaptado de [5]

As usinas hidroelétricas encontram-se dispostas em cascatas, fazendo com que a operação de uma usina afete as usinas que estejam a jusante. Isso faz com que o sistema seja interdependente. A entrada em operação de uma usina hidroelétrica fica condicionada à existência de uma vazão afluyente provinda de mananciais hídricos e áreas de drenagem de uma respectiva bacia hidrográfica. A vazão afluyente de uma usina é caracterizada de duas maneiras: vazões naturais e incrementais. Segundo Cicogna [5], a vazão natural afluyente a uma usina é a quantidade de água passando no rio sem considerar um reservatório para regularização, enquanto que a incremental é a vazão que entra na usina sem ter passado pelo reservatório a montante.

Os reservatórios das usinas hidroelétricas são de dois tipos: *de regularização*, em que as vazões afluyentes podem ser represadas por longos períodos de tempo, resultando em grandes volumes de água e áreas alagadas, ou *a fio d'água*, em que a vazão afluyente é acumulada apenas para prover regularização diária ou semanal, ou é utilizada diretamente para a geração.

A Figura 3.4 ilustra a cascata das usinas do rio Iguaçu. Nesta cascata há três usinas com reservatórios, Salto Santiago, Segredo e Foz do Areia, representadas por um triângulo e duas usinas a fio d'água, Salto Caxias e Salto Osório, representadas por um círculo.

A Figura 3.5 destaca diferentes níveis de volume de um reservatório. A usina tem um volume operativo mínimo,  $V_{\min}$ , abaixo do qual é considerado volume morto, já que a água não consegue adentrar ao canal adutor da usina para gerar energia. Por outro lado, o volume operativo máximo,  $V_{\max}$ , representa a capacidade máxima de armazenamento do reservatório, acima do qual ainda é considerado um volume de segurança. Em geral, o nível da água do reservatório deve encontrar-se entre os volumes extremantes operativos da usina. Este volume, que se encontra entre  $V_{\min}$  e  $V_{\max}$  é chamado de volume útil. Nas usinas a fio d'água, a variação do volume é pequena. Essa variação é considerada no planejamento diário. No planejamento de médio prazo, que é o objetivo dessa tese, os volumes mínimo e máximo, para estas usinas, são considerados coincidentes.

Considerando a afluyência de uma usina, existem duas possibilidades para que a água volte ao seu manancial hídrico natural. A primeira possibilidade é após o turbinamento de água,

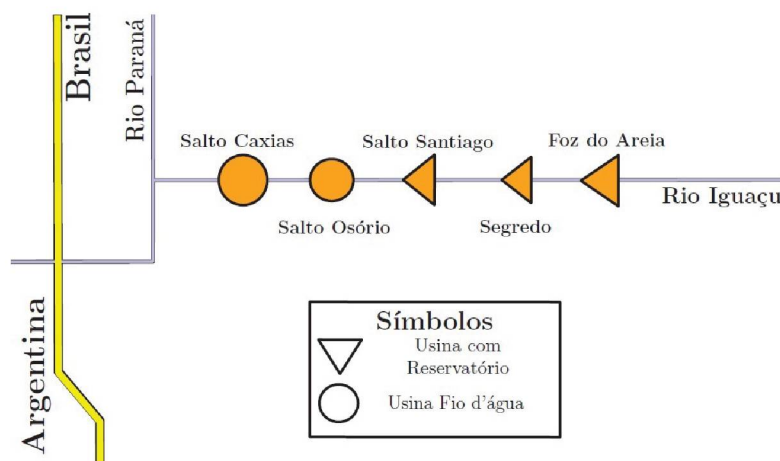


Figura 3.4: Cascata do rio Iguaçu.  
Fonte: Adaptado de ONS (2018)

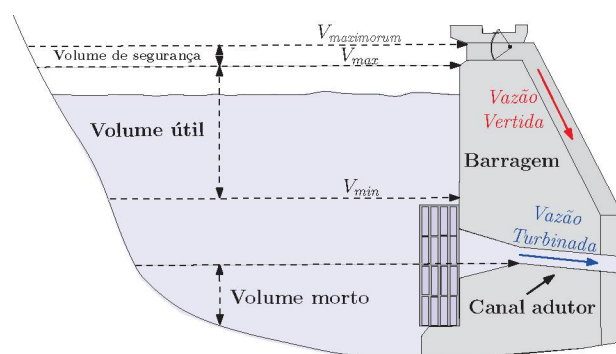


Figura 3.5: Níveis de um reservatório.  
Fonte: Adaptado de [42]

que por definição é a vazão que passa pelas turbinas produzindo energia após ser retirada pelo canal adutor do reservatório. A segunda possibilidade é o vertimento de água, cuja vazão não passa pelas turbinas. Tomando o custo como referência, deve-se evitar o vertimento, porém há casos em que isso não é possível, por exemplo, quando o volume do reservatório está acima do limite máximo operativo ou para garantir a manutenção das atividades a jusante da usina. Assim, a adição da vazão turbinada e vertida fornece a defluência do reservatório, isto é, a vazão que sai de uma usina para outra.

O SIN é classificado em quatro regiões geoeletricas de geração com características hidrológicas e operativas distintas entre si, denominadas subsistemas, a saber, Sul (S), Sudeste/Centro-Oeste (SE), Nordeste (NE) e Norte (N) [10]. A Figura 3.6 ilustra as linhas de transmissão do SIN, que segundo o ONS (2019) possui uma extensão de 141.388 Km de linhas de transmissão e tem uma projeção esperada de 185.484 Km de linhas de transmissão instalada em 2023.

O subsistema Sudeste/Centro-Oeste é o maior do SIN em capacidade instalada. Outra característica desta região é a sua sazonalidade muito bem definida, em que o período chuvoso vai de novembro a maio e o de seca nos meses restantes. Os registros históricos de vazão mostram uma sazonalidade semelhante nas regiões Nordeste e Norte. Já o subsistema Sul é conhecido por não possuir sazonalidade bem definida. Suas vazões possuem notável variabilidade fazendo a operação deste subsistema muito ligada a intercâmbios, seja importando energia em



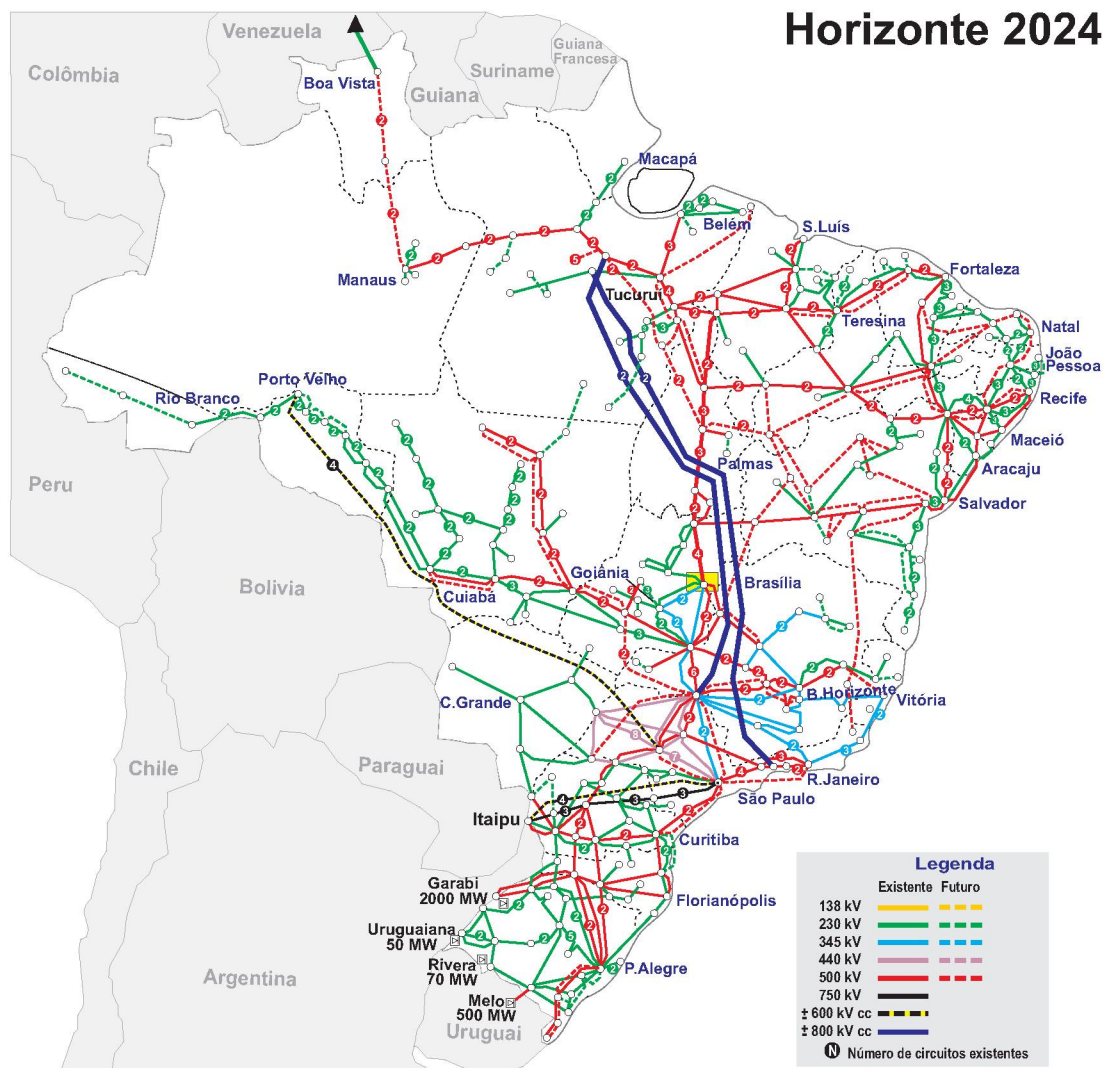


Figura 3.6: Sistema de Transmissão - Horizonte 2024.  
Fonte: ONS (2019)

meses de baixa afluência ou exportando em meses de alta afluência.

O problema de planejamento hidrotérmico consiste em decidir quanto de energia será gerada pelas usinas hidroelétricas e termoelétricas ao longo de um horizonte de planejamento, de forma que a demanda do sistema seja atendida com um custo mínimo possível. Pode-se pensar que a utilização das usinas hidroelétricas traz maiores benefícios econômicos, já que a água não tem custo, porém, sua operação exige um cuidadoso planejamento para conciliar os objetivos conflitantes de minimizar o desperdício de água (vertimentos) no período de chuvas e minimizar o risco de desabastecimento no período de seca. Além disso, somente a geração hidroelétrica não supre completamente a demanda brasileira, e restrições ambientais devem ser respeitadas. Logo, é exigido um equilíbrio entre a geração termoelétrica e hidroelétrica em todas as usinas consideradas, visando à operação como um todo [17]. Se a decisão tomada for utilizar a água no presente (despachando as usinas hidroelétricas) e no futuro as afluências forem baixas, haverá um custoso déficit de energia. Por outro lado se a decisão for economizar água (despachar as usinas térmicas) e as afluências futuras forem altas, o resultado será um vertimento de água, o que significa que não foi aproveitado todo o potencial hidráulico do sistema e água está sendo jogada fora. Marcilio em [20], destaca algumas características do problema:

estocasticidade devida à incerteza das afluições futuras; usinas hidroelétricas dispostas em cascatas, o que faz a operação de uma usina interferir nas usinas a jusante; necessidade de tomada de decisões que levem em consideração suas consequências futuras.

De acordo com o horizonte, o planejamento da operação é classificado em médio, curto e curtíssimo prazo [4]. Embora na literatura haja diferentes classificações, normalmente no problema de médio prazo, o horizonte é de 5 anos com discretização em estágios mensais; no curto prazo, considera-se horizonte de um ano com discretização semanal; e finalmente no curtíssimo prazo, o horizonte é de 1 ou 2 semanas com discretização diária. Quanto menor o horizonte, maior o grau de detalhamento dos dados na modelagem do problema.

O ONS dispõe de modelos computacionais, desenvolvidos pelo Centro de Pesquisa de Energia Elétrica - CEPEL, para a otimização da operação em cada um dos casos: NEWAVE, DECOMP e DESSEM para médio, curto e curtíssimo prazo, respectivamente. Segundo Nacif [24], atualmente de forma oficial são utilizados apenas os modelos NEWAVE e DECOMP. O NEWAVE utiliza a metodologia de programação dinâmica dual estocástica (PDDE). De acordo com [3], nos primeiros anos do período de estudo as usinas hidroelétricas são tratadas de forma individualizadas e nos demais estágios, elas são representadas por reservatórios equivalentes de energia (REEs). O modelo DECOMP, relativo ao planejamento de curto prazo, considera as usinas de forma individualizada. Em ambos, NEWAVE e DECOMP, o problema é linear estocástico, de grande porte e multiperíodo.

Nosso foco de interesse está no problema de planejamento de médio prazo para o SIN com tratamento das usinas de forma individualizada e levando em consideração seu tipo de produtividade que pode nos levar a problemas não lineares de grande porte. O problema consiste na minimização dos custos de geração termoeletrica e de déficit energético do sistema, levando em consideração as restrições operativas das usinas, balanço hídrico, atendimento à demanda, defluência mínima total dos reservatórios, evaporação e limite das variáveis. Deseja-se, assim, obter valores ótimos de geração hidráulica e térmica, intercâmbios de energia entre subsistemas e déficits em todo o horizonte de planejamento, com o objetivo de minimizar o custo total esperado da operação. As incertezas consideradas são devidas às afluições que nesta tese são tratadas através da análise de cenários. Na Seção 3.2 apresentamos o problema de planejamento hidrotérmico determinístico, ou seja, assumindo que um cenário de afluições é fornecido. O problema não antecipativo considerando um conjunto de cenários é discutido na Seção 3.3. Finalmente, na Seção 3.4 é apresentado o problema de planejamento não antecipativo com aversão ao risco.

## 3.2 Modelagem do problema determinístico

Nesta seção apresentamos a modelagem do problema de planejamento da operação de médio prazo, que consiste em tomar decisões sequenciais que minimizem o valor presente da soma dos custos de geração térmica, de déficit e de intercâmbio de energia entre subsistemas.

Em médio prazo, utilizar em grande escala as usinas hidroelétricas implica em baixo custo de operação devido à economia de combustíveis, mas pode haver um aumento no custo de operação futuro, principalmente se as afluições hidrológicas forem baixas. Já, utilizar em sua maioria as usinas termoeletricas ameniza o acréscimo do custo de operação futuro no caso em que as afluições sejam baixas, mas ocasiona aumento no custo da operação em curto prazo. Como a previsão das afluições futuras em horizontes maiores de que algumas semanas é incerta, não é possível definir uma boa política de operação sem levar em consideração a dependência temporal e a natureza estocástica do problema.

O modelo considerado, que é baseado em [20, 28], visa a minimização dos custos de geração térmica, de déficit energético do sistema e do custo de intercâmbio entre os subsiste-



mas, considerando restrições operativas das usinas, balanço hídrico, atendimento à demanda, evaporação e defluência mínima total nos reservatórios.

### 3.2.1 Modelagem

Consideramos o problema de planejamento de médio prazo com um horizonte de  $T$  estágios para um sistema hidroelétrico com  $R$  usinas hidroelétricas e  $K$  usinas termoeletricas subdivididas em  $S$  subsistemas com  $M$  linhas de intercâmbio de energia entre eles. Assumimos, nesta seção, que seja dado um cenário de afluentes, ou seja, que são conhecidas as afluentes para todas as usinas e para todo os estágios de planejamento. Reaímos, assim, em um problema determinístico de planejamento.

A fim de discutir a modelagem do problema de planejamento, apresentamos os índices considerados, os dados e variáveis, bem como a função objetivo e restrições do problema.

#### Índices

Consideramos os seguintes índices:

- $i$  - índice associado a uma usina hidroelétrica ( $i \in \{1, \dots, R\}$ )
- $j$  - índice associado a uma usina termoeletrica ( $j \in \{1, \dots, K\}$ )
- $s$  - índice associado a um subsistema ( $s \in \{1, \dots, S\}$ )
- $t$  - índice associado a um período ( $t \in \{1, \dots, T\}$ )
- $m$  - índice associado a uma linha de intercâmbio ( $m \in \{1, \dots, M\}$ )

#### Dados

A seguir, apresentamos a relação dos dados necessários das usinas e da relação entre os subsistemas para a modelagem e resolução do problema.

- $R_s$  - conjunto de índices das usinas hidroelétricas que pertencem ao subsistema  $s$
- $K_s$  - conjunto de índices das usinas termoeletricas que pertencem ao subsistema  $s$
- $J_i$  - conjunto de índices de reservatórios imediatamente a montante do reservatório  $i$
- $z_t$  - coeficiente de valor presente para o período  $t$ :  $\lambda_t = \frac{1}{(1+\beta)^t}$ , com  $\beta$  sendo a taxa de desconto
- $D_{s,t}$  - demanda do subsistema  $s$  no período  $t$  - [MW]
- $V_{\min_{i,t}}$  - volume mínimo do reservatório  $i$  no período  $t$  - [ $hm^3$ ]
- $V_{\max_{i,t}}$  - volume máximo do reservatório  $i$  no período  $t$  - [ $hm^3$ ]
- $QC_{\min_{i,t}}$  - vazão mínima de turbinagem do reservatório  $i$  no período  $t$  - [ $m^3/s$ ]
- $QC_{\max_{i,t}}$  - vazão máxima de turbinagem do reservatório  $i$  no período  $t$  - [ $m^3/s$ ]
- $GT_{\min_{j,t}}$  - geração térmica mínima da usina  $j$  no período  $t$  - [MW]

- $GT_{\max,j,t}$  - geração térmica máxima da usina  $j$  no período  $t$  - [MW]
- $\omega_s^+$  - conjunto de índices das linhas de intercâmbio que saem do subsistema  $s$
- $\omega_s^-$  - conjunto de índices das linhas de intercâmbio que chegam no subsistema  $s$
- $INT_{\max,m,t}$  - intercâmbio máximo de potência da linha  $m$  no período  $t$  - [MW]
- $\text{coef}_{i,t}$  - coeficiente de evaporação do reservatório  $i$  no período  $t$

Os dados acima são fornecidos pelo ONS [10]. As potências são tomadas como médias e consideradas constantes ao longo do período  $t$ , sendo, inclusive, comum no setor elétrico usar a unidade [MWmédio]. Consideramos também dados o número de horas do mês associado ao período  $t$ , o volume inicial dos reservatórios no início do horizonte de planejamento e um cenário de afluições,

- $\vartheta_t$  - Número de horas do mês associado ao período  $t$ .
- $V_{i,0}$  - volume inicial do reservatório  $i$  - [ $hm^3$ ]
- $Y_{i,t}$  - afluição natural do reservatório  $i$  durante o período  $t$  - [ $m^3/s$ ]

### Variáveis de decisão do problema

- $GT_{j,t}$  - Geração da usina térmica  $j$  durante o período  $t$  - [MW]
- $V_{i,t}$  - Volume armazenado no reservatório  $i$  no período  $t$  - [ $hm^3$ ]
- $QVT_{i,t}$  - Vazão vertida do reservatório  $i$  durante o período  $t$  - [ $m^3/s$ ]
- $QC_{i,t}$  - Vazão turbinada do reservatório  $i$  durante o período  $t$  - [ $m^3/s$ ]
- $INT_{m,t}$  - Intercâmbio de potência na linha  $m$  no período  $t$  - [MW]
- $DEF_{s,t}$  - Déficit do submercado  $s$  durante o período  $t$  - [MW]

As variáveis de decisão do problema são então:  $GT$  (potência térmica a ser gerada),  $V$  (volume armazenado),  $QVT$  (vazão vertida),  $QC$  (vazão turbinada),  $INT$  (intercâmbio entre subsistemas) e  $DEF$  (déficit do subsistema). Vamos associar cada variável de decisão ao período  $t$ , denotando, por exemplo,

$$GT_t = (GT_{1,t}, GT_{2,t}, \dots, GT_{K,t}),$$

o vetor das decisões da geração de todas as usinas térmicas no período  $t$ . Assim, quando a variável está representada com um único subíndice, este índice indica o período e a variável é vetorial. No entanto, quando a variável está representada por dois subíndices, ela é escalar. Consequentemente, para cada  $t \in \{1, \dots, T\}$ , as variáveis de decisão serão representadas vetorialmente com as dimensões descritas a seguir:

- $GT_t \in \mathbb{R}^K$
- $V_t, QVT_t, QC_t \in \mathbb{R}^R$
- $INT_t \in \mathbb{R}^M$

- $DEF_t \in \mathbb{R}^S$ ,

lembrando que  $K$  é o número de usinas termoeletricas,  $R$  é o número de reservatórios das usinas hidroeletricas,  $T$  é o número de períodos,  $S$  é o número de subsistemas e  $M$  é o número de linhas de intercâmbio existentes entre os submercados. Dessa forma, as variáveis de decisão para um período  $t \in \{1, \dots, T\}$  podem ser concatenadas em um vetor  $x_t$ ,

$$x_t = (GT_t \ V_t \ QVT_t \ QC_t \ INT_t \ DEF_t)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

com  $n = K + 3R + M + S$  e o vetor de decisão relativo a todos os períodos,

$$x = (x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_T^T)^T \in \mathbb{R}^{nT}. \quad (3.2)$$

### Funções dadas

Consideramos dadas as seguintes funções de custo:

- $CT_j$  - custo da térmica  $j$  que depende do tipo de combustível utilizado na usina. Fixado  $j \in \{1, \dots, K\}$ , essa função associa a cada valor de energia  $\vartheta_t GT_{j,t} \in \mathbb{R}$ , com  $t \in \{1, \dots, T\}$ , um custo  $[R\$]$ .
- $CD_s$  - representa o valor econômico do impacto causado nas diferentes atividades econômicas do país pelo não suprimento da demanda de energia do subsistema  $s$ . Fixado  $s \in \{1, \dots, S\}$ , essa função associa a cada déficit de energia  $\vartheta_t DEF_{s,t} \in \mathbb{R}$ , com  $t \in \{1, \dots, T\}$ , um custo  $[R\$]$ .
- $CI_m$  - representa o custo de intercâmbio de energia da linha  $m$ . Fixado  $m \in \{1, \dots, M\}$ , essa função associa a cada intercâmbio de energia  $\vartheta_t INT_{m,t} \in \mathbb{R}$ , com  $t \in \{1, \dots, T\}$ , um custo  $[R\$]$ .

As funções custos descritas acima são todas lineares. Assim, podemos escrever essas funções da seguinte maneira:

- $CT_j(\vartheta_t GT_{j,t}) = c_{T_j} \times \vartheta_t GT_{j,t}$
- $CD_s(\vartheta_t DEF_{s,t}) = c_{D_s} \times \vartheta_t DEF_{s,t}$
- $CI_m(\vartheta_t INT_{m,t}) = c_{I_m} \times \vartheta_t INT_{m,t}$ ,

em que  $c_{T_j}$ ,  $c_{D_s}$  e  $c_{I_m}$  representam os custos unitários de energia gerada pela térmica  $j$ , do déficit do sistema  $s$  e do intercâmbio da linha  $m$ , respectivamente. Os valores desses custos estão descritos nos Apêndices B e C.

Combinando essas funções, temos a função objetivo a ser minimizada.

Além das funções de custo, temos as funções envolvidas nas restrições. Consideramos dada a função que fornece a potência gerada em MW, ou seja,

- $GH_{i,t}$  - função da potência gerada na usina hidroelétrica  $i$  no período  $t$ , que depende das vazões  $QC_{i,t}$ ,  $QVT_{i,t}$ , e do volume médio  $V_{med_{i,t}}$ , em que o volume médio do reservatório  $i$  no período  $t$  é dado por:

$$V_{med_{i,t}} = \frac{1}{2}(V_{i,t-1} + V_{i,t}). \quad (3.3)$$

A função  $GH_{i,t}$ , detalhada na sequência, é responsável pela não linearidade do problema.

### Função Objetivo:

A otimização do planejamento hidrotérmico tem como objetivo minimizar o valor presente da soma dos custos operacionais das termoeletricas, econômicos causados por déficits energéticos e de intercâmbio entre os subsistemas. Dados  $\lambda_t, t \in \{1, \dots, T\}$  e as funções custo  $CT_j, CD_s, CI_m$ , para cada  $j \in \{1, \dots, K\}, s \in \{1, \dots, S\}$  e  $m \in \{1, \dots, M\}$ , respectivamente, a função objetivo a ser minimizada pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(x) = \sum_{t=1}^T \lambda_t \left( \sum_{j=1}^K CT_j(\vartheta_t GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(\vartheta_t DEF_{s,t}) + \sum_{m=1}^M CI_m(\vartheta_t INT_{m,t}) \right). \quad (3.4)$$

O coeficiente de valor presente  $\lambda_t$  diminui à medida que  $t$  aumenta e faz com que as térmicas sejam acionadas, quando possível, em um período mais próximo do fim do planejamento.

O custo do intercâmbio  $CI$  foi introduzido na modelagem no Relatório Técnico 2018 do Projeto PD 6491 – 0307/2013, “Projeto LYNX - Otimização em larga escala aplicada ao despacho hidrotérmico brasileiro: modelos hierárquicos de operação e planejamento em médio e curto prazos com integração de energia potência”. Os custos de intercâmbio, mesmo que pequenos, devem ser considerados para evitar ciclos desnecessários de troca de energia entre subsistemas.

### Restrições

#### • Restrições de Balanço Hídrico

A restrição de balanço hídrico relaciona o volume de um reservatório com o volume do período anterior, as afluições do reservatório, a evaporação da água em cada reservatório e as perdas. Como a unidade dos volumes é  $hm^3$  e das afluições  $m^3/s$ , considere para estágio  $t$ , o número de segundos  $\text{seg m\acute{e}s}(t)$  do mês correspondente e a constante

$$\nu(t) = \frac{\text{seg m\acute{e}s}(t)}{10^6}$$

que uniformiza as unidades.

Considere que a área da superfície  $area_{i,t}$  do reservatório  $i \in \{1, \dots, R\}$  no período  $t \in \{1, \dots, T\}$  possa ser estimada pelo seu volume médio através de um polinômio linear<sup>1</sup>, ou seja, que existam coeficientes  $a_{i,t}$  e  $b_{i,t}$ , tais que:

$$area_{i,t} = a_{i,t} \times V_{med_{i,t}} + b_{i,t},$$

em que o volume médio  $V_{med_{i,t}}$  está definido em (3.3). Desse modo, a evaporação em  $hm^3$  do reservatório  $i$  no período  $t$  pode ser aproximadamente calculada por:

$$\begin{aligned} E_{i,t} &= area_{i,t} \times \text{coef}_{i,t} \\ &= (a_{i,t} \times V_{med_{i,t}} + b_{i,t}) \text{coef}_{i,t} \\ &= aE_{i,t} \times V_{med_{i,t}} + bE_{i,t} \end{aligned}$$

em que  $aE_{i,t} = a_{i,t} \text{coef}_{i,t}$  e  $bE_{i,t} = b_{i,t} \text{coef}_{i,t}$ . Substituindo a expressão de  $V_{med_{i,t}}$ , segue que

$$E_{i,t} = \frac{1}{2} aE_{i,t} (V_{i,t-1} + V_{i,t}) + bE_{i,t}. \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>No Apêndice D discutimos como obtivemos essa aproximação linear para as usinas do SIN através do método de quadrados mínimos.



Finalmente, as restrições do balanço hídrico, para todo  $i \in \{1, \dots, R\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$ , são escritas como

$$V_{i,t} = V_{i,t-1} - E_{i,t} + \nu(t) \left( \sum_{r \in J_i} (QC_{r,t} + QVT_{r,t}) - QC_{i,t} - QVT_{i,t} + Y_{i,t} - \sum_{r \in J_i} Y_{r,t} \right).$$

Substituindo a expressão (3.5) e fazendo algumas manipulações, temos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{aE_{i,t}}{2}\right) V_{i,t} &= \left(1 - \frac{aE_{i,t}}{2}\right) V_{i,t-1} - bE_{i,t} + \\ &+ \nu(t) \left( \sum_{r \in J_i} (QC_{r,t} + QVT_{r,t}) - QC_{i,t} - QVT_{i,t} + Y_{i,t} - \sum_{r \in J_i} Y_{r,t} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que  $Y_{i,t}$  representa a afluência natural ao reservatório  $i$  durante o período  $t$  e  $J_i$  é o conjunto de índices de reservatórios imediatamente a montante do reservatório  $i$ .

### • Atendimento à demanda

A restrição de atendimento à demanda tem por objetivo garantir o atendimento da carga de cada subsistema em cada período. Esta restrição envolve as variáveis relacionadas à geração térmica das usinas, intercâmbios e eventuais déficits do subsistema, além da geração hídrica que é obtida através de uma função das vazões turbinada e vertida pelas usinas e do volume médio dos reservatórios do subsistema em um período.

### Geração hídrica

Antes de apresentar a restrição de demanda, vamos discutir a função que fornece a geração hídrica que pode ser expressa como:

$$GH_{i,t} = \zeta_i HLi_{i,t} QC_{i,t},$$

em que  $\zeta_i$  é a constante de produtividade específica da usina  $i$ , obtida do rendimento médio da usina  $\eta_i^{\text{médio}}$ , da aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e da massa específica da água  $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$ , pela expressão:

$$\zeta_i = \eta_i^{\text{médio}} g \rho_a,$$

cujos dados são fornecidos pelo NEWAVE [4]; e  $HLi_{i,t}$  é a altura líquida do reservatório, dada por:

$$HLi_{i,t} = \phi_i(V_{med_{i,t}}) - \theta_i(Q_{i,t}) - pc_{i,t}, \quad (3.7)$$

em que as funções  $\phi_i$  e  $\theta_i$  são polinômios de até quarto grau e  $pc_{i,t}$  é a perda de carga hidráulica. Os polinômios  $\phi_i$  e  $\theta_i$  representam, respectivamente, o nível de montante do reservatório  $i$  em função do seu volume médio  $V_{med_{i,t}}$ , dado em (3.3), e o nível de jusante do canal de fuga da usina em função da vazão total

$$Q_{i,t} = QC_{i,t} + QVT_{i,t}. \quad (3.8)$$

Os coeficientes dos polinômios  $\phi_i$  e  $\theta_i$ , denotados por  $m_{i,p}$  e  $n_{i,p}$  (com  $p = 0, \dots, 4$ ), respectivamente, estão disponíveis em [7] e são descritos no Apêndice C. Assim, esses polinômios, responsáveis pelas não linearidades do problema, são representados por:

$$\phi_i(V_{med_{i,t}}) = \sum_{p=0}^4 m_{i,p} V_{med_{i,t}}^p \quad (3.9)$$

e

$$\theta_i(Q_{i,t}) = \sum_{p=0}^4 n_{i,p} Q_{i,t}^p. \quad (3.10)$$

As perdas de carga hidráulica na usina  $i$  no período  $t$  são representadas por  $pc_{i,t}$ . Estas perdas ocorrem principalmente devido ao atrito entre a água e as canalizações do tubo de adução e podem ser representadas de três formas:

$$pc_{i,t} = \begin{cases} c_i HBruta_{i,t} \\ c_i \\ c_i Q C_{i,t}^2, \end{cases}$$

em que  $c_i$  é uma constante chamada de coeficiente de perdas hidráulicas da usina  $i$  e  $HBruta_{i,t}$  é a altura bruta da usina no período  $t$  dada por

$$HBruta_{i,t} = \phi_i(V_{med_{i,t}}) - \theta_i(Q_{i,t}).$$

A primeira representação da perda hidráulica,  $pc_{i,t}$ , indica uma porcentagem da altura bruta da usina; a segunda, um valor constante em metros e a terceira é a função turbinagem da usina. Nesta tese, estamos considerando a segunda representação em que a perda hidráulica é constante. Assim, a potência hídrica de uma usina hidroelétrica  $i$  num período  $t$  pode ser representada pela função de produção:

$$GH_{i,t} = \zeta_i [\phi_i(V_{med_{i,t}}) - \theta_i(Q_{i,t}) - pc_{i,t}] Q C_{i,t}. \quad (3.11)$$

O fator da altura líquida (3.7) na expressão acima é o responsável pelas não linearidades da restrição de demanda e consequentemente do problema. Nos modelos usuais de planejamento de médio prazo [4] a altura de queda  $HLiq$  é considerada constante e a função de produção (3.11) passa a ser linear. Finalmente, podemos explicitar as restrições de demanda. Para cada subsistema  $s$ , dados os conjuntos de índices:  $K_s$  de suas usinas termoeletricas,  $R_s$  de suas usinas hidroelétricas e  $\omega_s^+$  e  $\omega_s^-$  das linhas de intercâmbio que saem e chegam, respectivamente, do subsistema  $s$ , a restrição de demanda para todo  $s \in \{1, \dots, S\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$  é dada por:

$$\sum_{j \in K_s} GT_{j,t} + \sum_{i \in R_s} GH_{i,t} + \sum_{m \in \omega_s^-} INT_{m,t} - \sum_{m \in \omega_s^+} INT_{m,t} + DEF_{s,t} = D_{s,t}. \quad (3.12)$$

### • Defluência mínima

A restrição de defluência mínima total para o reservatório garante condições mínimas para manutenção da vida aquática e para uso de recursos hídricos a jusante da usina. Considerando (3.8) em que a defluência total  $Q_{i,t}$  do reservatório  $i$  é dada pela soma da vazão vertida  $QVT_{i,t}$  com a turbinada  $QC_{i,t}$ , a restrição de defluência mínima, para cada  $i \in \{1, \dots, R\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$ , pode ser escrita como

$$QVT_{i,t} + QC_{i,t} \geq Q_{min_{i,t}}. \quad (3.13)$$

No caso de um reservatório  $i$  sem turbinas,  $QC_{max_{i,t}} = 0$  para todo período  $t$ , e consequentemente toda a defluência é vertida. Neste caso, a defluência mínima satisfaz

$$QVT_{min_{i,t}} = Q_{min_{i,t}}.$$

Se tivermos  $Q_{min_{i,t}} \leq QC_{max_{i,t}}$  obriga-se que  $QC_{min_{i,t}}$  seja igual a  $Q_{min_{i,t}}$ , assim garantimos que não haverá vertimento desnecessário. Caso contrário, faz-se  $QC_{min_{i,t}} =$

$QC_{\max_{i,t}}$ , ou seja, o reservatório turbinou toda a sua capacidade e com isto haverá vertimento, o qual é dado por  $QVT_{\min_{i,t}} = Q_{\min_{i,t}} - QC_{\max_{i,t}}$ .

Desde que sejam feitas essas considerações, a restrição de defluência mínima (3.13) é sempre satisfeita com as restrições de caixa

$$QC_{i,t} \geq QC_{\min_{i,t}} \quad \text{e} \quad QVT_{i,t} \geq QVT_{\min_{i,t}}, \quad (3.14)$$

em que  $QVT_{\min_{i,t}} = \max\{0, Q_{\min_{i,t}} - QC_{\max_{i,t}}\}$ .

#### • Limites das Variáveis

- As usinas hidroelétricas apresentam uma série de restrições operativas que devem ser consideradas no problema de otimização.

- \* Capacidade de armazenamento do reservatório  $i$  no período  $t$

$$V_{\min_{i,t}} \leq V_{i,t} \leq V_{\max_{i,t}}.$$

- \* Capacidade de vazão turbinada do reservatório  $i$  no período  $t$

$$QC_{\min_{i,t}} \leq QC_{i,t} \leq QC_{\max_{i,t}}.$$

- \* Limites para vazão vertida do reservatório  $i$  no período  $t$ . Em geral, a vazão vertida pode ser nula. No entanto, como vimos para que a restrição de defluência mínima (3.13) seja satisfeita devemos impor a restrição de caixa (3.14), ou seja,

$$QVT_{\min_i} \leq QVT_{i,t}.$$

- Por sua vez, cada usina termoeletrica  $j \in \{1, \dots, K\}$  também está sujeita a limites máximo e mínimos de geração em cada período  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,

$$GT_{\min_{j,t}} \leq GT_{j,t} \leq GT_{\max_{j,t}}.$$

- Cada linha de intercâmbio  $m \in \{1, \dots, M\}$  está sujeita a limites energéticos  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,

$$0 \leq INT_{m,t} \leq INT_{\max_{m,t}}.$$

- A variável  $DEF_{s,t}$ , que indica o déficit de energia de cada subsistema  $s \in \{1, \dots, S\}$  no período  $t \in \{1, \dots, T\}$ , possui somente limitante inferior

$$0 \leq DEF_{s,t}.$$

### O problema de planejamento hidrotérmico

Em suma, o modelo de programação não linear e não convexo do planejamento hidrotérmico, considerado nesta tese, é sintetizado a seguir,

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \lambda_t \left( \sum_{j=1}^K CT_j(\vartheta_t GT_{j,t}) + \sum_{s=1}^S CD_s(\vartheta_t DEF_{s,t}) + \sum_{m=1}^M CI_m(\vartheta_t INT_{m,t}) \right) \\
& \text{sujeito a} \quad \left( 1 + \frac{aE_{i,t}}{2} \right) V_{i,t} = \left( 1 - \frac{aE_{i,t}}{2} \right) V_{i,t-1} - bE_{i,t} + \\
& \quad + \nu(t) \left( \sum_{r \in J_i} (QC_{r,t} + QVT_{r,t}) - QC_{i,t} - QVT_{i,t} + Y_{i,t} - \sum_{r \in J_i} Y_{r,t} \right) \\
& \quad \sum_{j \in K_s} GT_{j,t} + \sum_{i \in R_s} GH_{i,t} + \sum_{m \in \omega_s^-} INT_{m,t} - \sum_{m \in \omega_s^+} INT_{m,t} + DEF_{s,t} = D_{s,t} \\
& \quad V_{\min_{i,t}} \leq V_{i,t} \leq V_{\max_{i,t}} \\
& \quad QC_{\min_{i,t}} \leq QC_{i,t} \leq QC_{\max_{i,t}} \\
& \quad QVT_{\min_{i,t}} \leq QVT_{i,t} \\
& \quad GT_{\min_{j,t}} \leq GT_{j,t} \leq GT_{\max_{j,t}} \\
& \quad 0 \leq INT_{m,t} \leq INT_{\max_{m,t}} \\
& \quad 0 \leq DEF_{s,t},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, R\}$ ,  $j \in \{1, \dots, K\}$ ,  $s \in \{1, \dots, S\}$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

#### 3.2.2 Forma matricial das restrições lineares

Representamos, nesta seção, as restrições de balanço hídrico (3.6) na forma matricial  $Ax = b$ . Exemplificamos para o caso do planejamento para  $T = 2$  períodos de um sistema hipotético com  $R = 3$  reservatórios em cascata, conforme ilustrado na Figura 3.7.

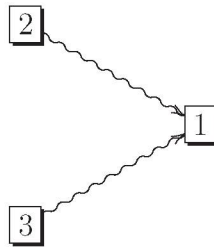


Figura 3.7: Exemplo de três reservatórios em cascata.

Fonte: A autora

Desta forma, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $t \in \{1, 2\}$ , considere dados os volumes iniciais  $V_{i,0}$ , os coeficientes de evaporação  $aE_{i,t}$ ,  $bE_{i,t}$  e a constante  $\nu(t)$ . A restrição de balanço hídrico (3.6) para essa cascata, pode ser escrita da seguinte maneira:



• Para  $t = 1$

$$\begin{aligned}
& - i = 1, J_1 = \{2, 3\} \\
& \left(1 + \frac{aE_{1,1}}{2}\right) V_{1,1} - \nu(1)(QC_{1,1} - QC_{2,1} - QC_{3,1} + QVT_{1,1} - QVT(2,1) - QVT(3,1)) = \\
& \quad = \left(1 - \frac{aE_{1,1}}{2}\right) V_{1,0} - bE_{1,1} + \nu(1)(Y_{1,1} - Y_{2,1} - Y_{3,1}), \\
& - i = 2, J_2 = \emptyset \\
& \quad \left(1 + \frac{aE_{2,1}}{2}\right) V_{2,1} - \nu(1)(QC_{2,1} + QVT_{2,1}) = \left(1 - \frac{aE_{2,1}}{2}\right) V_{2,0} - bE_{2,1} + \nu(1)(Y_{2,1}), \\
& - i = 3, J_3 = \emptyset \\
& \quad \left(1 + \frac{aE_{3,1}}{2}\right) V_{3,1} - \nu(1)(QC_{3,1} + QVT_{3,1}) = \left(1 - \frac{aE_{3,1}}{2}\right) V_{3,0} - bE_{3,1} + \nu(1)(Y_{3,1}),
\end{aligned}$$

• Para  $t = 2$

$$\begin{aligned}
& - i = 1, J_1 = \{2, 3\} \\
& \left(1 + \frac{aE_{1,2}}{2}\right) V_{1,2} - \nu(2)(QC_{1,2} - QC_{2,2} - QC_{3,2} + QVT_{1,2} - QVT(2,2) - QVT(3,2)) = \\
& \quad = \left(1 - \frac{aE_{1,2}}{2}\right) V_{1,1} - bE_{1,2} + \nu(2)(Y_{1,2} - Y_{2,2} - Y_{3,2}), \\
& - i = 2, J_2 = \emptyset \\
& \quad \left(1 + \frac{aE_{2,2}}{2}\right) V_{2,2} - \nu(2)(QC_{2,2} + QVT_{2,2}) - \left(1 - \frac{aE_{2,2}}{2}\right) V_{2,1} = -bE_{2,2} + \nu(2)(Y_{2,2}), \\
& - i = 3, J_3 = \emptyset \\
& \quad \left(1 + \frac{aE_{3,2}}{2}\right) V_{3,2} - \nu(2)(QC_{3,2} + QVT_{3,2}) - \left(1 - \frac{aE_{3,2}}{2}\right) V_{3,1} = -bE_{3,2} + \nu(2)(Y_{3,2}).
\end{aligned}$$

Vamos escrever as restrições de balanço hídrico matricialmente da forma  $Ax = b$ . Inicialmente, escrevemos os blocos matriciais correspondentes às variáveis  $V$ ,  $QVT$  e  $QC$ . Em relação às componentes do vetor  $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^{RT}$  dos volumes dos reservatórios temos a seguinte matriz:

$$M_V = \begin{bmatrix} 1 + \frac{aE_{1,1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{aE_{2,1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{aE_{3,1}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 + \frac{aE_{1,1}}{2} & 0 & 0 & 1 + \frac{aE_{1,2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{aE_{2,1}}{2} & 0 & 0 & 1 + \frac{aE_{2,2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \frac{aE_{3,1}}{2} & 0 & 0 & 1 + \frac{aE_{3,2}}{2} \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga, em relação às componentes da variável  $QC = (QC_1, QC_2) \in \mathbb{R}^{RT}$  que representa a vazão turbinada, temos:

$$M_{QC} = \begin{bmatrix} -\nu(1) & \nu(1) & \nu(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu(2) & \nu(2) & \nu(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu(2) \end{bmatrix}.$$

Como a variável  $QVT$ , que representa a vazão vertida, tem o mesmo comportamento da variável  $QC$  nas restrições de balanço hídrico, a matriz  $M_{QVT}$  coincide com a matriz  $M_{QC}$ . Finalmente, a matriz de coeficientes que representa o sistema de restrições de balanço hídrico tem o seguinte formato:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{RT \times KT} & M_V & M_{QVT} & M_{QC} & 0_{RT \times MT} & 0_{RT \times ST} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{RT \times nT},$$

em que  $0_{RT \times KT}$  representa uma matriz nula de dimensão  $RT \times KT$  e assim analogamente para matrizes nulas de outras dimensões. O vetor independente do sistema linear de restrições de balanço hídrico deste exemplo é dado por:

$$b = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{aE_{1,1}}{2}\right) V_{1,0} - bE_{1,1} + \nu(1) (Y_{1,1} - Y_{2,1} - Y_{3,1}) \\ \left(1 - \frac{aE_{2,1}}{2}\right) V_{2,0} - bE_{2,1} + \nu(1) (Y_{2,1}) \\ \left(1 - \frac{aE_{3,1}}{2}\right) V_{3,0} - bE_{3,1} + \nu(1) (Y_{3,1}) \\ -bE_{1,2} + \nu(2) (Y_{1,2} - Y_{2,2} - Y_{3,2}) \\ -bE_{2,2} + \nu(2) (Y_{2,2}) \\ -bE_{3,2} + \nu(2) (Y_{3,2}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{RT}.$$

Com isso, temos então a forma matricial  $Ax = b$  para representar as restrições de balanço hídrico.

### 3.2.3 Formato geral

Nesta seção escrevemos o problema determinístico (3.15) no formato (1.18).

#### Forma vetorial das restrições de caixa

Inicialmente escrevemos as restrições de caixa, considerando o vetor de variáveis como definido em (3.2). Denotamos por  $GT_{\min_t}$  o vetor da geração mínima das termoeletricas no período  $t \in \{1, \dots, T\}$ , ou seja,

$$GT_{\min_t} = (GT_{\min_{1,t}}, GT_{\min_{2,t}}, \dots, GT_{\min_{K,t}}).$$

De modo análogo definimos vetores para cada um dos limitantes das variáveis de decisão, para cada  $t$ . Levando em consideração esses vetores, definimos,

$$l_t = (GT_{\min_t} \ V_{\min_t} \ 0_R \ QC_{\min_t} \ 0_M \ 0_S)^T$$

e

$$u_t = (GT_{\max_t} \ V_{\max_t} \ QVT_{\max_t} \ QC_{\max_t} \ INT_{\max_t} \ DEF_{\max_t})^T,$$

de modo que, para cada  $t \in \{1, \dots, T\}$ , devemos ter:

$$l_t \leq x_t \leq u_t.$$

Além disso concatenamos os limitantes

$$l = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_T)^T \quad \text{e} \quad u = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_T)^T,$$

de modo que  $l \leq x \leq u$ .

### Problema determinístico

O conjunto viável determinado por todas as restrições vistas na Seção 3.2.1, ou seja, de balanço hídrico (3.6), de atendimento à demanda (3.12) e de caixa; será denotado por

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^{nT},$$

com  $n = K + 3R + M + S$ . Dessa maneira o problema de planejamento hidrotérmico determinístico consiste em minimizar  $f$  definida em (3.4) no conjunto  $\Gamma$ , ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Trata-se de um problema não linear e não convexo devido ao cálculo da potência hídrica usada nas restrições de atendimento à demanda. Este modelo apresenta:

- Número de variáveis:  $(K + 3R + M + S) \times T$
- Restrições não lineares de igualdade:  $ST$
- Restrições lineares de igualdade:  $KT$
- Restrições de caixa:  $(K + 3R + M + S) \times T$

Dependendo do número de usinas do sistema e do número de períodos de planejamento, pela quantidade de variáveis e restrições, o problema (3.16) é considerado de grande porte. Diferentes métodos de programação linear [26, 34] podem ser usados para resolvê-lo, como métodos de Lagrangiano Aumentado [14, 21] que usam funções penalidade ou métodos de filtro [11, 16].

## 3.3 O problema não antecipativo

Na Seção 1.3 estudamos o problema não antecipativo de forma geral. Nesta seção discutimos suas particularidades para o caso do problema de planejamento da operação do SIN.

### 3.3.1 Particularidades do contexto

O problema (3.16) é determinístico pois é dado um cenário de afluência. Nesta seção consideramos um conjunto de  $L$  cenários de afluências e o problema não antecipativo (PNA). Na definição de não antecipatividade de Rockafellar e Wets em [38], quando dois cenários são idênticos nos primeiros  $t$  estágios, as decisões associadas a esses cenários devem ser idênticas nesses  $t$  primeiros estágios. No entanto, nesta tese, consideramos que os cenários são idênticos somente no primeiro estágio, logo estamos interessados em obter as decisões para o primeiro mês de planejamento. Discutiremos a seguir os cenários de afluências e a definição da variável  $x_1$ .

#### Cenários de afluências

Dados históricos das afluências naturais mensais em todas as usinas hidroelétricas estão disponíveis no Brasil ao longo de 85 anos entre 1931 e 2015. Neste trabalho são considerados 81 cenários históricos de afluências iniciados entre os anos de 1931 e 2012 com 48 meses à frente e também um conjunto de 200 cenários sintéticos equiprováveis gerados pelo modelo CARMA, fornecidos pelos autores de [9], a partir de uma data estipulada.

Um cenário de afluência, para  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , será representado por

$$Y^\ell = \{(Y_{i,t})^\ell \mid i = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T\},$$

que pode ser visto como uma matriz  $R \times T$  das afluências de todas as hidroelétricas em cada período. Uma coluna  $t$  da matriz é o vetor de afluências  $Y_t^\ell \in \mathbb{R}^R$  daquele cenário  $\ell$  para todas as usinas no período  $t$ , ou seja,

$$Y_t^\ell = ((Y_{1,t})^\ell, (Y_{2,t})^\ell, \dots, (Y_{R,t})^\ell).$$

Para o problema não antecipativo é considerado um conjunto de  $L$  cenários de afluências  $\{Y^1, Y^2, \dots, Y^L\}$  tais que

$$Y_1^\ell = Y_1^1, \quad \text{para todo } \ell \in \{2, \dots, L\}. \quad (3.17)$$

A Figura 3.8 ilustra o conjunto de  $L$  cenários de afluências como um paralelepípedo de dimensão  $T$  (períodos) por  $L$  (cenários) por  $R$  (reservatórios), em que o elemento  $(Y_{i,t})^\ell$  é a afluência da usina  $i$ , no período  $t$  do cenário  $\ell$ . A página  $Y^1$  representa as afluências para todos os reservatórios  $i \in \{1, \dots, R\}$  em todos os períodos  $t \in \{1, \dots, T\}$  para o cenário 1. Por outro lado, a primeira coluna de cada página, em destaque na figura, representa  $\{Y_1^1, \dots, Y_1^L\}$  que corresponde às afluências do primeiro período de todas as usinas e todos os cenários. Está em destaque para evidenciar que num conjunto de cenários não antecipativos, as afluências do primeiro mês coincidem independente do cenário.

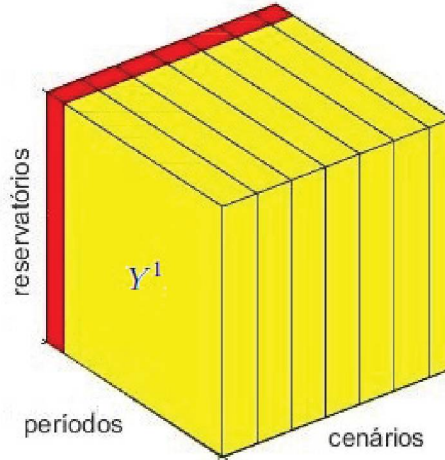


Figura 3.8: Conjunto de cenários de afluências.

Fonte: A autora

Um cenário de afluência  $Y^\ell$ , com  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , afeta a restrição de balanço hídrico para cada  $i \in \{1, \dots, R\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{aE_{i,t}}{2}\right) V_{i,t} = & \left(1 - \frac{aE_{i,t}}{2}\right) V_{i,t-1} - bE_{i,t} + \\ & + \nu(t) \left( \sum_{r \in J_i} (QC_{r,t} + QVT_{r,t}) - QC_{i,t} - QVT_{i,t} + Y_{i,t}^\ell - \sum_{r \in J_i} Y_{r,t}^\ell \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, agora o conjunto viável determinado pelas restrições de balanço hídrico (3.18), de atendimento à demanda (3.12) e de caixa depende do cenário  $Y^\ell$  e será denotado por  $\Gamma_\ell$ .



### Decisão do primeiro mês

Como vimos na Seção 1.3, no problema não antecipativo estamos interessados na decisão do primeiro mês. Seguindo a notação (3.1), temos que a decisão do primeiro mês é

$$x_1 = (GT_1 \ V_1 \ QVT_1 \ QC_1 \ INT_1 \ DEF_1)^T \in \mathbb{R}^n.$$

No entanto, no problema de planejamento hidrotérmico, em particular, precisa-se decidir inicialmente quanto verter e quanto turbinar em cada usina hidroelétrica com reservatório. Assim, consideramos  $J$  o conjunto dos índices das usinas com reservatório, a decisão do primeiro mês,

$$\bar{x}_1 = (QVT_{J,1}, QC_{J,1}). \quad (3.19)$$

e

$$y^\ell = (GT_1 \ V_1 \ QVT_{R \setminus J,1} \ QC_{R \setminus J,1} \ INT_1 \ DEF_1 \ x_2^\ell \ \dots \ x_T^\ell)^T.$$

Dessa forma, o problema não antecipativo a ser considerado é

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L f(\bar{x}_1, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} \quad (\bar{x}_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolvendo esse problema não antecipativo, temos como decisão  $(\overline{QVT}_{J,1}, \overline{QC}_{J,1})$  das usinas com reservatório no primeiro período. Para determinar as demais variáveis, basta resolver o problema determinístico (3.15), com horizonte de planejamento  $T = 1$ , afluência  $Y_1^1$  (usada em (3.17)) e a restrição adicional de que

$$(QVT_{i,1}, QC_{i,1}) = (\overline{QVT}_{i,1}, \overline{QC}_{i,1}), \quad \text{para toda usina } i \in J. \quad (3.21)$$

Como solução desse problema, temos a decisão

$$x_1 = (GT_1, V_1, QVT_1, QC_1, DEF_1, INT_1)$$

para o primeiro mês.

### 3.3.2 Política não antecipativa

Na Seção 1.3 definimos uma política não antecipativa num contexto geral. Nesta seção, dados um cenário de simulação e um horizonte de simulação, discutimos a obtenção de uma política não antecipativa para o caso do problema de planejamento. Para obtenção de uma política não antecipativa resolvemos sequencialmente um problema não antecipativo seguido de problema de curto prazo. Esse processo sequencial é realizado tantas vezes quanto for o horizonte de simulação. Em cada estágio do processo sequencial, a partir do volume inicial dos reservatórios, é resolvido um problema não antecipativo e obtém-se uma decisão para o primeiro mês. A partir dessa decisão, são fixadas as vazões turbinadas e vertidas para as usinas com reservatório, e resolvido um problema de curto prazo determinístico com o cenário de simulação, e com o maior detalhamento possível do modelo. Obtém-se assim as demais decisões para este estágio. Repete-se esse processo, tomando-se como volume inicial para o próximo estágio aquele dado pelo balanço hídrico levando-se em consideração o volume anterior e as decisões do estágio atual. A sequência de decisões obtidas pelos problemas de curto prazo define a política para aquele cenário de simulação. Veremos a seguir algumas possibilidades para a definição do horizonte dos problemas não antecipativos resolvidos em cada estágio; a relação entre os cenários usados nos problemas não antecipativos e o cenário de simulação dado; e finalmente sintetizamos esse processo sequencial em forma de algoritmo.

## Horizonte de planejamento

Considere  $\bar{T}$  o horizonte de simulação. Para cada estágio  $e \in \{1, \dots, \bar{T}\}$  de simulação, resolve-se um problema não antecipativo. O horizonte de planejamento desse problema depende do estágio  $e$  e será denotado por  $T = T(e)$ . Há pelo menos três opções para a escolha dessa função:

- Horizonte fixo, em que a cada novo estágio, é considerado um mês a menos no horizonte, ou seja,

$$T = T(e) = \bar{T} - e + 1. \quad (3.22)$$

- Horizonte rolante, sempre “rolando”  $\bar{T}$  meses à frente do período atual. Neste caso, para todo  $p$ ,

$$T = T(e) = \bar{T}.$$

- Horizonte baseado no mês de calendário, conforme apresentado em [31],

$$T = T(e) = \bar{T} + 12 + M - \text{mês}(e),$$

em que  $M$  é um mês do calendário no qual se deseja finalizar o planejamento e  $\text{mês}(e)$  é o mês do calendário associado ao estágio  $e$ .

## Cenários de afluentes

Considere dado um cenário de simulação

$$\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_{\bar{T}}\},$$

em que  $\bar{Y}_e \in \mathbb{R}^R$ , para todo  $e \in \{1, \dots, \bar{T}\}$ . Este cenário é adotado como uma simulação do cenário verdadeiro.

Além disso, para cada estágio de simulação  $e \in \{1, \dots, \bar{T}\}$ , considere o volume atual dos reservatórios e um conjunto de  $L$  cenários

$$\{Y^1, Y^2, \dots, Y^L\}$$

tal que  $Y^\ell$  é uma matriz  $R \times T(e)$  e

$$Y_1^\ell = \bar{Y}_e,$$

para todo  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . Desse modo as afluentes no primeiro estágio dos  $L$  cenários são coincidentes.

## Algoritmo

Resolve-se o problema (3.20), com  $T = T(e)$  e obtém-se  $(\overline{QVT}_1, \overline{QC}_1)$  para as usinas com reservatório. Fixados esses vertimento e turbinamento em cada usina com reservatório, obtemos as demais variáveis do estágio  $e$  como solução do problema de curto prazo (3.15) com  $T = 1$ , afluência  $\bar{Y}_e$  e a restrição (3.21). Essa solução, denotada por  $\bar{q}_e$  é dada por

$$\bar{q}_e = x_1 = (GT_1, V_1, QVT_1, QC_1, DEF_1, INT_1),$$

e é a decisão a ser tomada no estágio de planejamento  $e$ . O volume inicial  $V_0$  para o próximo estágio é dado por  $V_1$  da solução acima, ou seja, associado ao volume final do estágio  $e$ . Para a obtenção de uma política não antecipativa repete-se esse processo para todos os estágios de simulação, conforme sintetizado no algoritmo abaixo. Considere que são fornecidos os dados das usinas como descritos na Seção 3.2.

### Algoritmo 3.1 Obtenção de uma política não antecipativa

Dados: Horizonte de simulação  $\bar{T}$ ,

Cenário de simulação  $\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_T\}$ .

Repita para  $e = 1$  até  $\bar{T}$

Defina  $T = T(e)$ .

Considere um conjunto de cenários equiprováveis  $\{Y^1, Y^2, \dots, Y^L\}$

de  $T$  períodos a partir do estágio  $e$  com  $Y_1^\ell = \bar{Y}_e$ , para todo  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ .

Obtenha  $(\overline{QVT}_1, \overline{QC}_1)$  como solução do problema (3.20).

Obtenha  $\bar{q}_e$  como solução  $x$  do problema de curto prazo (3.15) com  $T = 1$ ,  
afluência  $\bar{Y}_e$  e a restrição (3.21).

Faça  $V_0 = V_1$

A saída do Algoritmo 3.1 é a política operativa  $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_e, \dots, \bar{q}_T\}$  para o horizonte  $\bar{T}$  de planejamento.

## 3.4 Aversão ao risco

Na Seção 2.2 apresentamos a inclusão de aversão ao risco ao problema estocástico. Nesta seção, discutimos o problema de planejamento da operação do sistema hidrotérmico com aversão ao risco de três modos. O primeiro em que a variável aleatória está associada à função custo total do planejamento. O segundo, como sugerido por Costa Junior em [6], é a aplicação de  $CVaR_\alpha$  apenas na parcela relativa ao déficit. O terceiro, como sugerido por Shapiro em [40], é considerar a combinação convexa da esperança e do  $CVaR_\alpha$  da função custo.

Considere, nesta seção, um conjunto de  $L$  cenários de afluências equiprováveis coincidentes no primeiro estágio e  $\alpha \in (0, 1)$ .

### 3.4.1 Inclusão do risco no custo total

O problema de planejamento da operação do sistema hidrotérmico com aversão ao risco consiste em (1.24) com as particularidades vistas na Seção 3.3.1. Ou seja, considere a função objetivo  $f$  dada em (3.4), decisão do primeiro mês  $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{2|J|}$  definida em (3.19) e o conjunto viável  $\Gamma_\ell$ , para cada  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , determinado pelas restrições de balanço hídrico (3.18), de atendimento à demanda (3.12) e de caixa. O problema de planejamento da operação do sistema hidrotérmico com aversão ao risco na função objetivo é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L g_\ell \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & (\bar{x}_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell - f(\bar{x}_1, y^\ell) + z \geq 0 & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4.2 Inclusão do risco na parcela do Déficit

A função custo  $f$  definida em (3.4) é composta pela soma de três parcelas relativas ao custo: das térmicas, do déficit e dos intercâmbios. Entre estas, a parcela que oferece maior risco na política operativa é o custo do déficit de energia. Escolher despachar usinas hidroelétricas e ter afluências baixas no futuro pode acarretar em um racionamento, causando déficits de energia.



Na prática, déficits de energia não ocorrem com frequência mas quando ocorrem, causam um grande transtorno. Portanto, como sugerido por Costa Junior em [6], apresentamos nessa seção a aplicação de  $CVaR_\alpha$  apenas nesta parcela como alternativa ao que foi visto na Seção 2.2.

A função objetivo (3.4) pode ser decomposta em duas parcelas:

$$f(\cdot) = C(\cdot) + Def(\cdot),$$

em que  $C(\cdot)$  é a função que representa a soma dos custos das térmicas e dos intercâmbios e  $Def(\cdot)$  representa o custo dos déficits. Defina as variáveis aleatórias  $C_{x,\xi}$  e  $Def_{x,\xi}$ , que para cada escolha de  $x(\cdot)$ , associa a cada  $\xi \in \Xi$  o valor de  $C(x(\xi)) \in \mathbb{R}$  e  $Def(x(\xi)) \in \mathbb{R}$ , respectivamente, ou seja:

$$C_{x,\xi} : \xi \in \Xi \rightarrow C(x(\xi)) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Def_{x,\xi} : \xi \in \Xi \rightarrow Def(x(\xi)) \in \mathbb{R}$$

Assim, minimizar a esperança da variável aleatória  $f_{x,\xi}$  equivale a minimizar a soma das esperanças de  $C_{x,\xi}$  e  $Def_{x,\xi}$ . Estamos interessados em aplicar a medida de risco à parcela do déficit, ou seja, considerar o problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad E[C_{x,\xi}] + CVaR_\alpha[Def_{x,\xi}] \\ & \text{sujeito a} \quad x(\xi) \in \Gamma(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \Xi \\ & \quad \quad \bar{x}_1(\xi) = \bar{x}_1(\xi'), \quad \text{para todo } \xi, \xi' \in \Xi. \end{aligned}$$

Assumindo que todos os cenários são equiprováveis, usando o Teorema 1.23 e o Lema 1.24 com  $Z = Def_{x,\xi}$  e  $\bar{Z} = C_{x,\xi}$ , o problema anterior pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{1}{L} C(\bar{x}_1, y^\ell) + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell \right) \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad (\bar{x}_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad g_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad g_\ell - Def(\bar{x}_1, y^\ell) + z \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Este problema pode ser resolvido por métodos sem e com decomposição. Para aplicar o método Progressive Hedging, analogamente ao que foi discutido na Seção 2.1, considerando  $L$  cópias das variáveis  $\bar{x}_1$  e  $z$ , fixando  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{2|J|}$  e  $\hat{z} \in \mathbb{R}$  e introduzindo variáveis de folga às últimas restrições de desigualdade, o problema (3.24) é reescrito nas variáveis  $((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell) \in \mathbb{R}^{n^T} \times \mathbb{R}$ , com  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L} C(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell \right) \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad (\bar{x}_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad \bar{x}_1^\ell = \hat{x}, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad z^\ell = \hat{z}, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad g_\ell - Def(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad g_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, L \\ & \quad \quad s^\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Para resolver este problema utilizamos o Algoritmo 2.3, em que, neste caso, o subproblema a ser resolvido, em cada iteração  $k \geq 1$ , é dado por

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \mathcal{L}_{\alpha,k}^\ell((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell, (w^\ell)^{k-1}, (u^\ell)^{k-1}) \\ & \text{sujeito a} \quad (\bar{x}_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \\ & \quad \quad g_\ell - Def(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell = 0, \\ & \quad \quad g_\ell \geq 0, \\ & \quad \quad s^\ell \geq 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$



em que, dado  $\rho_k > 0$ ,  $\mathcal{L}_{\alpha,k}^\ell : \mathbb{R}^{nT+1+2|J|+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha,k}^\ell((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell, w^\ell, u^\ell) &= \frac{1}{L} C(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell(z^\ell) + (w^\ell)^T \bar{x}_1^\ell \\ &+ (u^\ell) z^\ell + \frac{\rho_k}{2} \|\bar{x}_1^\ell - \hat{x}^{k-1}\|^2 + \frac{\rho_k}{2} (z^\ell - \hat{z}^{k-1})^2. \end{aligned}$$

Ou seja, para cada  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , o vetor  $((\bar{x}_1^\ell, y^\ell)^k, (z^\ell)^k)$  ao invés de ser obtido como solução de (2.10), passa a ser obtido como solução de (3.25), no Algoritmo 2.3.

### 3.4.3 Risco como combinação convexa da esperança e de $CVaR_\alpha$

Uma terceira alternativa para inclusão de risco é através da combinação convexa da esperança e de  $CVaR_\alpha$ , como sugerida por Shapiro em [40], e apresentada na Seção 1.3. No contexto do problema de planejamento, dados  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\beta \in [0, 1]$ , o problema (1.27) se reescreve como

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (1-\beta) f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z + \frac{1}{L(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^L g_\ell \\ \text{sujeito a} \quad & (\bar{x}_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell - \beta f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z \geq 0, & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Novamente, este problema pode ser resolvido por métodos sem e com decomposição. Para resolvê-lo pelo método Progressive Hedging, analogamente à Seção 2.2 e aos outros casos mencionados anteriormente, consideramos cópias  $\bar{x}_1^\ell$  e  $z^\ell$  das variáveis  $\bar{x}_1$  e  $z$ , respectivamente, e uma meta  $(\hat{x}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^{2|J|} \times \mathbb{R}$ . Essas variáveis são usadas para reescrever as restrições de não antecipatividade de forma desacoplada. Além disso, introduzimos variáveis de folga às últimas restrições de desigualdade. Assim, o problema se reescreve nas variáveis  $((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell) \in \mathbb{R}^{nT} \times \mathbb{R}$  como

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{1}{L} (1-\beta) f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell \right) \\ \text{sujeito a} \quad & (\bar{x}_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell = 1, \dots, L \\ & \bar{x}_1^\ell = \hat{x}, & \ell = 1, \dots, L \\ & z^\ell = \hat{z}, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell - \beta f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell = 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & g_\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L \\ & s^\ell \geq 0, & \ell = 1, \dots, L. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Para resolver o problema (3.26) utilizamos o Algoritmo 2.3, com a diferença que o subproblema a ser resolvido, em cada iteração  $k \geq 1$ , é, neste caso, dado por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathcal{L}_{\alpha,k}^\ell((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell, (w^\ell)^{k-1}, (u^\ell)^{k-1}) \\ \text{sujeito a} \quad & (\bar{x}_1^\ell, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \\ & g_\ell - \beta f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + z^\ell - s^\ell = 0, \\ & g_\ell \geq 0, \\ & s^\ell \geq 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha,k}^\ell((\bar{x}_1^\ell, y^\ell), z^\ell, w^\ell, u^\ell) &= \frac{1}{L} (1-\beta) f(\bar{x}_1^\ell, y^\ell) + \frac{1}{L} z^\ell + \frac{1}{L(1-\alpha)} g_\ell + (w^\ell)^T \bar{x}_1^\ell \\ &+ (u^\ell) z^\ell + \frac{\rho_k}{2} \|\bar{x}_1^\ell - \hat{x}^{k-1}\|^2 + \frac{\rho_k}{2} (z^\ell - \hat{z}^{k-1})^2. \end{aligned}$$

Ou seja, no Algoritmo 2.3, calculamos  $((\bar{x}_1^\ell, y^\ell)^k, (z^\ell)^k)$ , para cada  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ , como solução de (3.27), ao invés de (2.10).

No Capítulo 4 apresentaremos experimentos numéricos para o problema de planejamento da operação do SIN sem aversão ao risco e com as três alternativas de aversão ao risco, usando métodos sem e com decomposição.

## Capítulo 4

### Experimentos numéricos

Este capítulo é dedicado aos experimentos numéricos para resolução do problema de planejamento da operação para dois sistemas teste extraídos do SIN - Sistema Interligado Nacional.

Os recursos computacionais bem como os algoritmos utilizados na resolução dos problemas são indicados na Seção 4.1. Os dois sistemas teste cujos dados são reais e fornecidos pelo ONS são apresentados na Seção 4.2 e serão referenciados pelo seu número de hidroelétricas: Sistema 21 e Sistema 141, indicando que possuem 21 e 141 hidroelétricas, respectivamente. Os conjuntos de cenários, históricos e sintéticos, de afluições para cada um dos sistemas teste são comentados na Seção 4.3.

O problema não antecipativo (3.20) pode ser resolvido por métodos sem e com decomposição. O PH - Progressive Hedging, que é um método com decomposição, envolve a atualização de um parâmetro de penalidade. A Seção 4.4 apresenta alguns experimentos numéricos para a escolha da estratégia para essa atualização. Com a regra de atualização do parâmetro de penalidade definida, validamos o método de decomposição aplicado ao problema de planejamento hidrotérmico. Essa validação, apresentada na Seção 4.5, se dá pela comparação dos resultados obtidos na resolução do mesmo problema utilizando o método sem decomposição proposto por [28].

As não linearidades do problema de planejamento (3.15) são devidas ao fator correspondente à altura de queda de cada usina que aparece na função de produção (3.11). Ao se fixar esse fator como constante para cada uma das usinas, o modelo se torna linear, e o tempo computacional para resolução do problema é reduzido consideravelmente. A Seção 4.6 apresenta resultados numéricos comparativos entre os modelos linear e não linear. Essas comparações são feitas na resolução do problema de planejamento da operação não antecipativo (3.20) sem e com aversão ao risco pelo método PH. Adotando o modelo linear, na Seção 4.7 apresentamos resultados numéricos comparando três metodologias de inclusão de aversão ao risco no problema do planejamento: inclusão da medida  $CVaR$  na função custo, na parcela relacionada com o custo do déficit e a combinação convexa entre a esperança e o  $CVaR$ , ambos na função custo. A Seção 4.8 compara os custos do planejamento da operação fixando a decisão do primeiro mês, que é o foco de interesse, obtida por quatro estratégias diferentes relacionadas à medida de risco  $CVaR$  na função custo. Na Seção 4.9 discutimos duas estratégias para reduzir o número de cenários considerado no problema não antecipativo e, conseqüentemente, a dimensão do problema. Experimentos numéricos são apresentados para justificar a estratégia adotada.

Os testes mencionados nas seções anteriores foram realizados na resolução do problema de planejamento da operação do Sistema 21. Com as escolhas das estratégias validadas por esses testes, concluímos o capítulo com experimentos numéricos de maior porte com o Sistema 141. A Seção 4.10 é dedicada à obtenção de uma política não antecipativa através de simulações, conforme Seção 3.3.2, para a resolução do problema de planejamento da operação

do sistema considerando as abordagens neutra ao risco (3.20) e com aversão ao risco no custo total (3.23).

## 4.1 Recursos computacionais

Nesta seção descrevemos os recursos computacionais utilizados nos experimentos numéricos para resolver os problemas descritos no Capítulo 3. Os testes numéricos foram realizados em um notebook DELL Gaming G5 5590 Intel Core i7 9750H CPU@2.6GHz com 16 GB RAM, 6 núcleos, 12 processadores lógicos, 64-bit usando Matlab R2019b.

Todos os problemas não lineares envolvidos na tese foram resolvidos pelo método de filtro. Na Seção 4.1.1 descrevemos brevemente este método, com a implementação cedida pelos autores de [29, 30]. Para maiores detalhes consultar [11, 16].

Em todos os experimentos, foi permitido esvaziar os reservatórios no final do planejamento. A responsável pelas não linearidades do problema (3.15) é a função de produção (3.11) usada nas restrições de demanda. Para testes preliminares e análises do sistema pode-se considerar um modelo linear, ou seja, altura de queda  $HLiq$  constante. Os problemas determinísticos (3.15) com função de produção linear foram resolvidos usando a rotina `linprog` do Matlab.

Os problemas não antecipativos, discutidos na Seção 3.3, foram considerados sem e com decomposição. Os problemas não antecipativos sem decomposição foram resolvidos pelo método de filtro.

Já os problemas com decomposição foram resolvidos pelo Algoritmo 2.1 com  $\varepsilon = 0.1$  no critério de parada (2.8). O algoritmo Progressive Hedging, denotado por PH, decompõe o problema por cenários, ou seja, em cada iteração são resolvidos  $L$  problemas determinísticos independentes. Esses  $L$  problemas foram resolvidos pelo método de filtro. A decomposição permite paralelizar a implementação, diminuindo o tempo computacional de uma forma expressiva, como tratado por Klimes e Popela em [18]. Utilizamos o pacote do Matlab *Parallel Computing Toolbox* que permite solucionar problemas computacionais com cálculos paralelos em computadores multicore, GPUs e clusters de computadores. Para utilizar este pacote usamos o comando `parfor` em vez do comando `for`. O número de atividades em paralelo que é executada depende do número de núcleos disponíveis no computador, no nosso caso 6 núcleos.

### 4.1.1 Método de Filtro

Nesta seção, descrevemos brevemente o método de filtro [11, 16] que foi utilizado para resolver todos os problemas não lineares envolvidos nesta tese. O método se propõe a determinar pontos estacionários, ou seja, pontos que satisfaçam as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [26, 34].

O método de filtro foi utilizado para resolver o problema determinístico (3.16) e os problemas não antecipativos: neutro ao risco (3.20), com aversão ao risco na função objetivo (3.23), com aversão ao risco no custo do déficit (3.24) e o problema que considera combinação convexa da esperança e de  $CVaR_\alpha$  (3.26). Além disso, o método de filtro também foi utilizado para resolver os subproblemas do tipo (2.10). Todos esses problemas podem ser escritos da forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && c(x) = 0 \\ &&& Ax = b \\ &&& x \in \Upsilon \end{aligned} \tag{4.1}$$



com  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^p$ ,  $\Upsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u\}$  e  $l, u \in \mathbb{R}^n$ , em que  $n, m$  e  $p$  são definidos de acordo com cada problema.

A resolução do problema (4.1) envolve o controle de dois objetivos conflitantes: minimizar a função objetivo e obter viabilidade. Os métodos de filtro consideram otimalidade e viabilidade separadamente, priorizando esta última, uma vez que a solução do problema deve ser um ponto viável. Considerando uma medida de inviabilidade  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por

$$h(x) = \left\| \begin{bmatrix} c(x) \\ Ax - b \end{bmatrix} \right\|_{\infty}, \quad (4.2)$$

o filtro é definido como um conjunto de pares da forma  $(f(x^j), h(x^j))$ , em que nenhum par é dominado por outro. Dizemos que o par  $(f(x^j), h(x^j))$  é dominado pelo par  $(f(x^\ell), h(x^\ell))$  se, e somente se,

$$f(x^j) \geq f(x^\ell) - \alpha h(x^\ell) \quad \text{e} \quad h(x^j) \geq (1 - \alpha)h(x^\ell)$$

com  $\alpha \in (0, 1)$  fixado. Em nossa implementação, foi adotado  $\alpha = 0.1$ .

Com esta regra de dominação, o filtro define uma região proibida associada aos pares  $(f(x^\ell), h(x^\ell))$  escolhidos das iterações anteriores. Em cada iteração, a partir do ponto corrente  $x^k$ , calcula-se um ponto tentativo que será aceito como próximo iterando se o par  $(f, h)$  associado a ele não pertencer à região proibida. Esse ponto tentativo é calculado por programação quadrática sequencial (PQS) que considera em cada iteração um modelo quadrático da forma

$$m_k(x^k + d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d, \quad (4.3)$$

em que  $H_k$  é a Hessiana da Lagrangeana.

Dado o raio da região de confiança  $\Delta > 0$  e uma linearização do conjunto viável

$$\mathcal{L}(x^k) = \{x^k + d \in \mathbb{R}^n \mid c(x^k) + J_c(x^k)d = 0, \ A(x^k + d) - b = 0\},$$

em que  $J_c$  é a Jacobiana de  $c$ , resolve-se o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && m_k(x^k + d) \\ &\text{sujeito a} && x^k + d \in \mathcal{L}_\lambda(x^k) \\ &&& x^k + d \in \Upsilon \\ &&& \|d\| \leq \Delta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observe que a formulação (4.4) garante que as restrições de caixa são sempre satisfeitas.

Uma solução  $\bar{d}$  do problema (4.4) é obtida de forma decomposta considerando-se uma fase de viabilidade e uma de otimalidade que dão origem a outros dois problemas quadráticos, os quais são resolvidos pela rotina `quadprog` do Matlab.

O raio  $\Delta > 0$  é atualizado segundo as regras clássicas de região de confiança (maiores detalhes em [26]). Assim, se o ponto  $x^k + \bar{d}$  não for proibido pelo filtro ele é aceito como novo iterando, e um novo multiplicador de Lagrange estimado é obtido a partir da solução de (4.4).

De acordo com [16], as condições de KKT, em um ponto viável  $\bar{x}$ , são equivalentes a  $d^c(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ , em que

$$d^c(x, z) = P_{\mathcal{L}}(z - \nabla f(x)) - z,$$

com  $P_{\mathcal{L}(x)}$  sendo a projeção ortogonal de  $x$  no conjunto  $\mathcal{L}$ . Com base nisso, o algoritmo para quando encontra um ponto viável  $\bar{x}$  tal que

$$h(\bar{x}) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|d^c(\bar{x}, \bar{x})\| < \varepsilon.$$

Nesta tese, foi adotado a tolerância  $\varepsilon = 0.1$ .

## 4.2 Sistemas teste

Consideramos dois sistemas teste extraídos do SIN - Sistema Interligado Nacional, cujos dados, disponibilizados pelo ONS [10], foram tratados pelo grupo do Projeto LYNX [31]. O primeiro deles abrange praticamente todo o SIN e o segundo, usado para testes preliminares, contém apenas 21 usinas hidroelétricas. A Figura 4.1 apresenta um diagrama esquemático das usinas hidroelétricas do SIN. As afluentes nos reservatórios são conhecidas por um registro

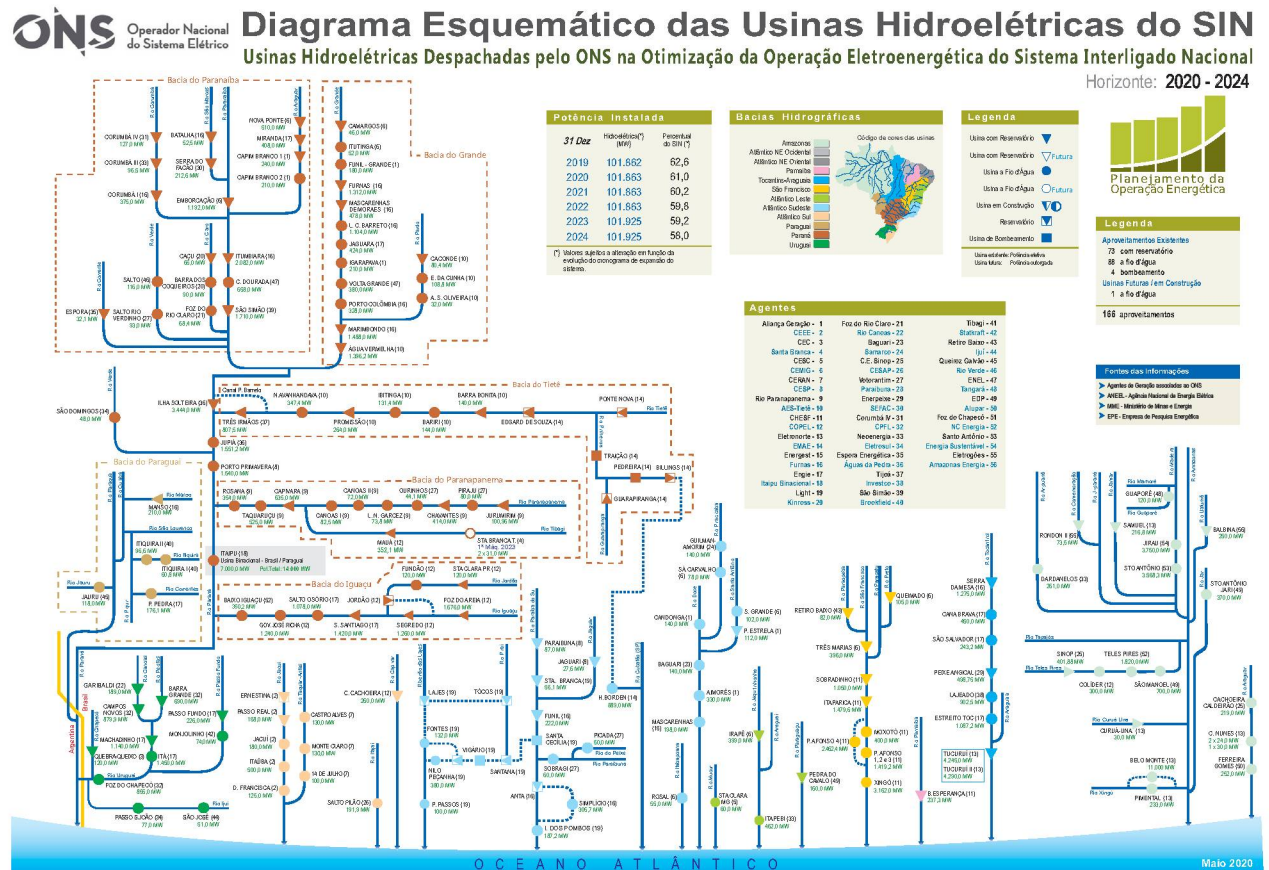


Figura 4.1: Diagrama esquemático das usinas hidroelétricas do SIN.

Fonte: ONS [10]

histórico de 85 anos, e métodos estatísticos são usados para gerar séries sintéticas como vimos na Seção 3.3.1.

#### 4.2.1 Sistema com 141 usinas hidroelétricas

O principal sistema teste consiste de  $R = 141$  usinas hidroelétricas, com 111 usinas não isoladas, sendo que 64 delas têm reservatório,  $K = 105$  usinas térmicas, distribuídas em  $S = 6$  subsistemas, sendo que um deles é um nó fictício.

A Tabela 4.1 apresenta o número total de usinas hidroelétricas, número de usinas hidroelétricas isoladas e número total termoelétricas de cada um dos cinco subsistemas denominados de: Sudeste/Centro-Oeste (SE), Sul (S), Nordeste (NE), Norte (N), Itaipu. A última coluna indica a potência instalada em cada subsistema em [MW].

A Figura 4.2 mostra as linhas de intercâmbios possíveis entre os subsistemas, em que o nó fictício representa as ligações de intercâmbio entre Norte-Nordeste-Sudeste. Conforme

Subsistema	Hidroelétrica		Termoelétrica	Potência [MW]
	Total	Não isoladas		
1 - SE	94	74	36	40392
2 - S	30	24	12	14793
3 - NE	7	7	39	6551
4 - N	9	5	18	12489
5 - Itaipu	1	1	0	14000

Tabela 4.1: Distribuição das usinas por subsistemas.

Fonte: ONS [10]

Seção 3.2.1,  $\omega_s^+$  e  $\omega_s^-$  representam o conjunto de índices das linhas de intercâmbio que saem e chegam, respectivamente, do subsistema  $s$ . Assim, por exemplo, temos que  $\omega_5^+ = \{10, 11\}$ , visto que o subsistema 5 - Itaipu pode enviar energia para os subsistemas 1 - Sudeste e 2 - Sul. Por outro lado,  $\omega_5^- = \emptyset$ , visto que Itaipu não recebe energia de nenhum subsistema. Além disso, como a usina de Itaipu deve obrigatoriamente enviar energia para outros subsistemas, o custo de intercâmbio das linhas 10 e 11 é nulo para efeito de modelagem.

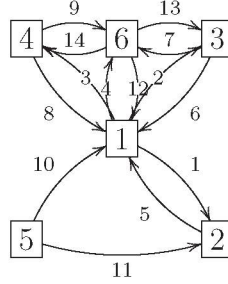


Figura 4.2: Grafo com as linhas de intercâmbio entre os subsistemas.

Fonte: A autora

A Tabela 4.2 apresenta a capacidade de transmissão de cada uma das linhas de intercâmbio, representadas na Figura 4.2. Essas capacidades representam o intercâmbio máximo  $INT_{\max_{m,t}}$ , para cada linha  $m$  e todo período  $t$  do horizonte de planejamento.

A topologia do sistema é representada na Figura 4.3, onde triângulos representam usinas com reservatórios e cores diferentes são usadas para distinguir os subsistemas, sendo a cor vermelha representando o subsistema SE, a cor azul o subsistema S, a cor amarela o subsistema NE, a cor verde o subsistema N e, por fim, a cor preta indicando o subsistema Itaipu. Os círculos representam as usinas a fio d'água e pequenos círculos representam as usinas isoladas. Os números indicam os códigos utilizados pelo ONS para identificar as usinas, conforme Figura 4.1.

Os dados das usinas hidroelétricas e termoelétricas encontram-se nos Apêndices A e B, respectivamente. Os coeficientes de cada uma das parcelas da função objetivo (3.4) estão disponíveis em [7] e são descritos no Apêndice C. A demanda foi fornecida pelo ONS para cada um dos quatro subsistemas geoeletricos, lembrando que Itaipu e o nó fictício não possuem demanda.

As usinas isoladas, ou seja, usinas a fio d'água sem reservatório a montante na cascata, têm volume fixado, desta forma essas usinas não fazem parte da minimização do problema já que suas vazões vertidas e turbinadas podem ser definidas a priori. Ou seja, para toda usina isolada  $r$  e todo o período  $t \in \{1, \dots, T\}$ , temos que

$$QC_{r,t} = \min\{QC_{\max_r}, Y_{r,t}\} \quad \text{e} \quad QVT_{r,t} = Y_{r,t} - Q_{r,t}.$$



Linha de transmissão	Capacidade [MW]
1	2800
2	2800
3	2800
4	2800
5	3306
6	1700
7	1700
8	1700
9	1700
10	12300
11	12300
12	2200
13	2200
14	2200

Tabela 4.2: Capacidade de transmissão [MW] das linhas de intercâmbio entre os subsistemas.  
Fonte: ONS [10]

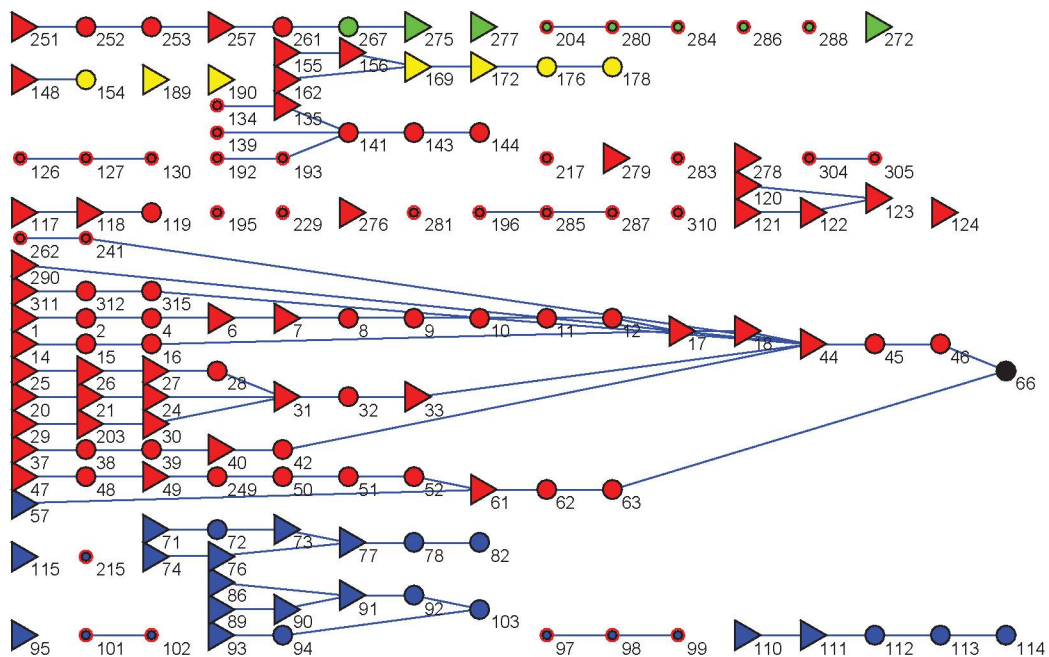


Figura 4.3: Sistema de 141 usinas.

Fonte: Gerado pela autora com programa cedido por Clóvis Caesar Gonzaga

A afluência incremental é, então, adicionada à afluência de todas as usinas que estão a jusante até que uma com reservatório seja encontrada. A energia gerada pelas usinas isoladas é calculada e deduzida da demanda do respectivo subsistema.



### 4.2.2 Sistema com 21 usinas hidroelétricas

Para testes preliminares, consideramos um segundo sistema teste, baseado em [13], com um subconjunto de  $R = 21$  usinas hidroelétricas e  $K = 15$  usinas térmicas do sistema apresentado na seção anterior. Essas usinas estão distribuídas entre os 5 subsistemas Sudeste/Centro-Oeste (SE), Sul (S), Nordeste (NE), Norte (N) e Itaipu. As linhas de intercâmbio são as mesmas que as indicadas na Figura 4.2. A topologia do sistema é representada na Figura 4.4, em que os 16 triângulos indicam usinas com reservatórios e os 5 círculos, as usinas a fio d'água. Os números abaixo dos símbolos são os códigos utilizados pelo ONS conforme Figura 4.1. Os subsistemas estão representados por cores distintas: SE em vermelho; S em azul; NE em amarelo; N em verde e Itaipu em preto.

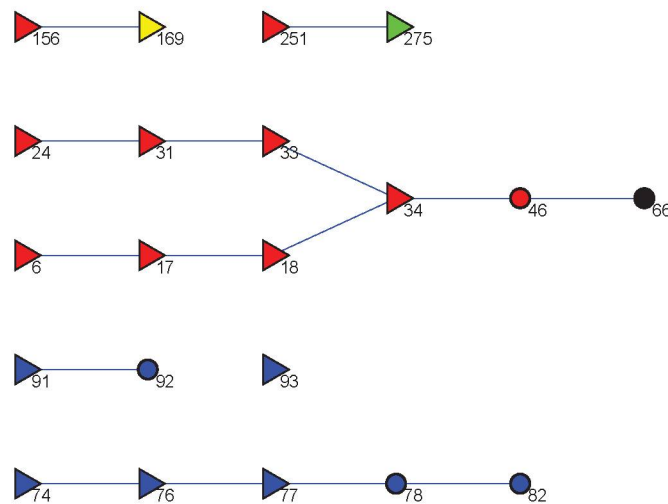


Figura 4.4: Sistema de 21 usinas.

Fonte: Gerado pela autora com programa cedido por Clóvis Caesar Gonzaga

A Tabela 4.3 apresenta o número total de usinas hidroelétricas, o número total de termoelétricas e a potência instalada em [MW] de cada um dos cinco subsistemas. Os dados em

Subsistema	Hidroelétrica	Termoelétrica	Potência [MW]
1 - <b>SE</b>	10	7	16555
2 - <b>S</b>	8	2	9490
3 - <b>NE</b>	1	3	1050
4 - <b>N</b>	1	3	8370
5 - Itaipu	1	0	14000

Tabela 4.3: Distribuição das usinas por subsistemas - Sistema 21.

Fonte: ONS [10]

negrito nos Apêndices A e B correspondem às usinas hidroelétricas e termoelétricas, respectivamente, desse sistema. Os coeficientes de cada uma das parcelas da função objetivo (3.4) estão disponíveis em [7] e são descritos no Apêndice C. A demanda foi fornecida pelo ONS [10] para cada um dos quatro subsistemas geoeletricos, lembrando que Itaipu e o nó fictício não possuem demanda.

### 4.3 Cenários de afluências

O ONS [10] disponibiliza dados históricos das afluências naturais mensais em todas as usinas hidroelétricas do SIN. Como discutimos na Seção 3.3, neste trabalho são considerados cenários históricos de afluências do período de 1931 a 2015 e também um conjunto de 200 cenários sintéticos gerados pelo modelo CARMA e fornecidos pelos autores de [9].

O Sistema 21, apresentado na Seção 4.2.2, foi utilizado para testes de pequeno e médio porte. Para este sistema selecionamos um grupo de  $L = 10$  cenários e outro de  $L = 100$  cenários. Para testes maiores, consideramos o Sistema 141, apresentado na Seção 4.2.1, e neste caso, selecionamos  $L = 100$  cenários. Discutimos a seguir os procedimentos para essa seleção de cenários.

#### 4.3.1 Cenários para o Sistema 21

Foi resolvido o problema determinístico (3.15) considerando os dados do sistema 21, com um horizonte de planejamento de  $T = 12$  meses, para cada um dos 200 cenários sintéticos disponíveis. Como o interesse está na decisão do primeiro mês, fixamos nossa atenção ao custo de planejamento da operação referente a esse primeiro período, ou seja, à parcela para  $T = 1$  da função objetivo (3.4). A Figura 4.5 exibe esses custos para cada um dos 200 cenários. Na figura da esquerda, foi mantida a ordenação dos cenários (abscissas), enquanto na da direita os custos (ou seja, as ordenadas) estão ordenados de forma crescente. As linhas pontilhadas na figura da direita indicam os 10 cenários selecionados com custos mensais variados. A Tabela 4.4 mostra os custos desses 10 cenários, sendo que a primeira coluna mostra sua ordenação relativa ao valor do custo; a segunda coluna indica o número do cenário (conforme figura da esquerda); e a terceira coluna, o valor do custo do primeiro mês de planejamento da operação.

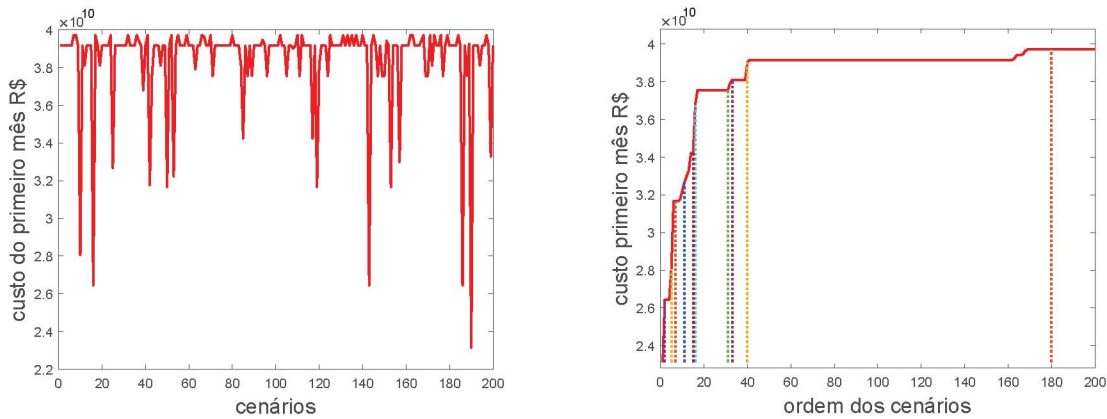


Figura 4.5: Custo do planejamento da operação do primeiro mês por cenário para o sistema 21.

Fonte: A autora

De forma análoga selecionamos um outro conjunto de 100 cenários sintéticos. A seguir, sintetizamos o conjunto de índices dos cenários escolhidos de cada um dos dois grupos: com 10 e 100 cenários:

- $L = 10$ : {16 10 119 25 117 39 188 12 108 70}.
- $L = 100$ : {190 16 143 186 10 50 119 153 42 53 25 157 199 85 117 39 43 71 87 89 96 105 111 124 147 149 150 169 170 177 188 63 12 19 47 84 120 172 194 108 1 2 3 4 5 6 9 11 13 14 15 18 20 21 22 23 26 27 28 29 198 200 189 37 167}

Posição	Cenário	Custo do primeiro mês [ $10^{10}$ R\$]
2	16	2.6450
5	10	2.8059
7	119	3.1664
11	25	3.2667
15	117	3.4232
16	39	3.6803
31	188	3.7562
33	12	3.8106
40	108	3.9019
180	70	3.9716

Tabela 4.4: Relação entre cenário escolhido e sua posição.  
Fonte: A autora

151 94 67 7 8 17 24 32 36 41 52 55 59 66 70 80 102 110 112 125 131 133 135  
137 140 145 162 163 168 171 173 176 179 184 197}.

### 4.3.2 Cenários para o Sistema 141

Analogamente ao que foi descrito na seção anterior, foram selecionados 100 cenários tendo como base uma distribuição variada dos custos do primeiro mês. Foram resolvidos os 200 problemas determinísticos (um problema para cada cenário sintético) da forma (3.15) para o sistema de 141 hidroelétricas, com o horizonte de planejamento de  $T = 12$  meses. A Figura 4.6 mostra a variação dos custos do primeiro mês do planejamento da operação. Na figura da direita os custos estão ordenados de forma crescente.

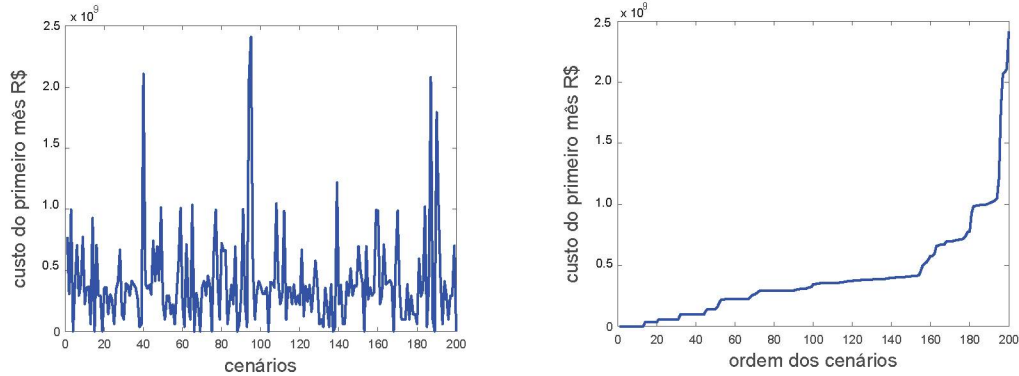


Figura 4.6: Custo do planejamento para o primeiro mês por cenário para o sistema 141.  
Fonte: A autora

Listamos a seguir o conjunto dos índices dos 100 cenários selecionados em ordem crescente dos custos do primeiro mês.

- $L = 100$ : {15 69 19 137 61 135 185 39 56 13 142 30 64 131 176 122 54 178 126 134 120 55 84 10 60 161 50 124 24 155 37 182 197 90 53 72 7 44 23 57 67 127 133 70 103 11 171 21 114 12 100 149 148 129 43 125 141 186 164 117 136 167 31 41 106 152 192 144 109 99 194 46 48 166 73 151 96 128 58 76 28 47 150 154 199 163 62 1 112 160 77 3 91 108 139 190 94 187 40 95}.

Para validar o conjunto de cenários sintéticos, apresentamos a seguir uma comparação entre os custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141 considerando os dois conjuntos de cenários: histórico e sintético. Foram resolvidos os problemas determinísticos (3.15) para cada um dos cenários, com  $T = 45$  meses, a partir do mês de abril, com função de produção hidráulica (3.11) linear. A Figura 4.7 exibe os custos ordenados do planejamento da operação obtidos pela resolução desses problemas determinísticos. A figura da esquerda refere-se aos custos considerando os 81 cenários históricos de 45 meses, enquanto a figura da direita considera os 100 cenários sintéticos.

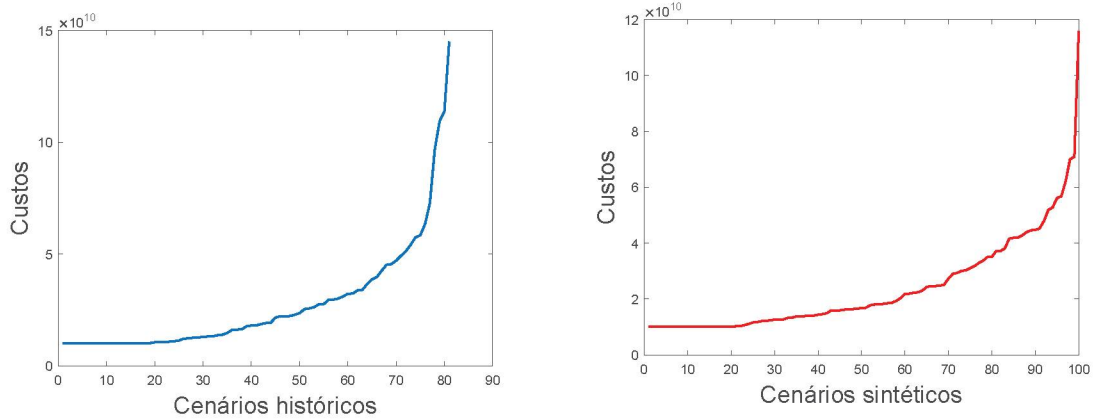


Figura 4.7: Custos ordenados do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos (esquerda) e sintéticos (direita).

Fonte: A autora

A Figura 4.8 sintetiza a informação dos gráficos da figura anterior, através do gráfico da distribuição desses custos, evidenciando que o conjunto de cenários sintéticos representa satisfatoriamente os cenários históricos.

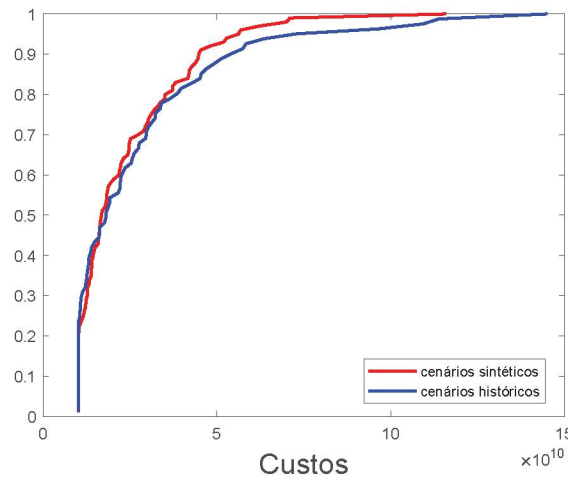


Figura 4.8: Comparação da distribuição dos custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos e sintéticos.

Fonte: A autora

A Figura 4.9 exibe a distribuição sem ordenação dos custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos iniciados entre 1931 e 2012.



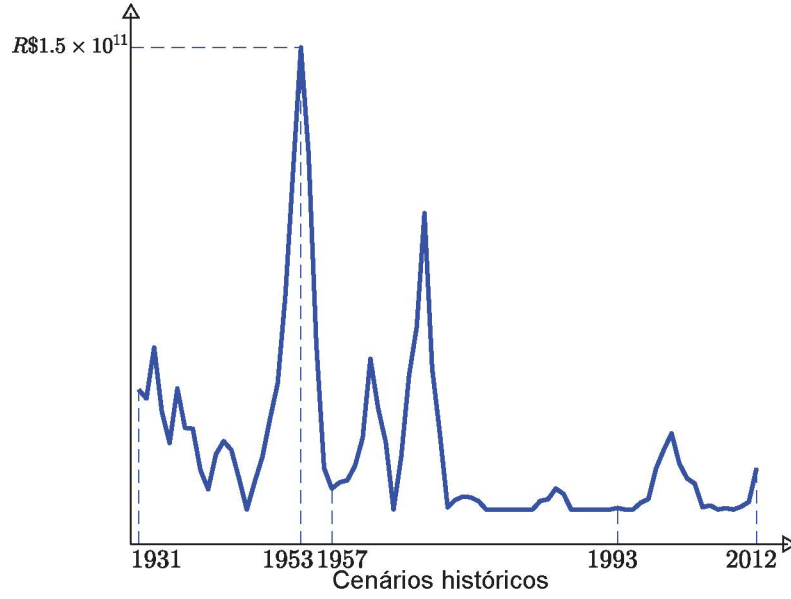


Figura 4.9: Distribuição dos custos do problema de planejamento da operação do Sistema 141, com horizonte de 45 meses, considerando cenários históricos.

Fonte: A autora

Os anos destacados de 1953, 1957 e 1993 representam os cenários que iniciam nestes anos com duração de 45 meses, os quais serão utilizados nos experimentos numéricos por fornecerem o maior, o menor e o custo mediano do problema do planejamento da operação, repectivamente.

## 4.4 Parâmetro de penalidade do Algoritmo PH

Nesta seção apresentamos alguns testes preliminares realizados para escolha do parâmetro de penalidade  $\rho_k$  no Algoritmo 2.1, levando em consideração as possibilidades discutidas na Seção 2.1.

Para esses testes foi resolvido o problema com  $T = 12$  meses, a partir do mês de abril, de planejamento da operação do sistema com 21 usinas hidroelétricas apresentado na Seção 4.2.2, com função de produção hidráulica (3.11) linear e considerando o conjunto de  $L = 10$  cenários de aflúências descrito na Seção 4.3.1. Para essa configuração do sistema, o problema não antecipativo (3.20) se torna linear com as seguintes dimensões:

- Número de variáveis:  $[(14 + 3 \times 21 + 14 + 6) \times 12] \times 10 = 11640$
- Restrições lineares de demanda:  $(6 \times 12) \times 10 = 720$
- Restrições lineares de balanço hídrico:  $(21 \times 12) \times 10 = 2520$
- Restrições de não antecipatividade:  $(2 \times 16) \times (10 - 1) = 288$
- Restrições de caixa:  $[(14 + 3 \times 21 + 14 + 6) \times 12] \times 10 = 11640$ .

A comparação do desempenho do algoritmo com diferentes regras para atualizações do parâmetro de penalidade foi baseada no número de iterações e no valor da função objetivo do problema (3.20). Testes exaustivos foram realizados para a escolha deste parâmetro, no entanto exibimos aqui apenas um deles a fim de justificar a regra de atualização adotada.

## Variantes do algoritmo

Consideramos quatro variantes do Algoritmo 2.1, cuja diferença entre elas esta na forma de atualização do parâmetro de penalidade. As variantes consideradas, já discutidas na Seção 2.1, são apresentadas a seguir:

- **rhocte**: Algoritmo PH com  $\rho_{k+1} = \rho_2$ , para  $k \geq 2$ .
- **rhocre**: Algoritmo PH com  $\rho_{k+1} = \tau \rho_k$ ,  $\tau = 1.2$  e  $k \geq 2$ .
- **rhovar**: Algoritmo PH com  $\rho_{k+1} = (\tau \rho_k)^\mu$ ,  $\tau = 1.5$ ,  $\mu = 0.9$  e  $k \geq 2$ .
- **rhodec**: Algoritmo PH com  $\rho_{k+1} = \frac{1}{\alpha + \beta(k+1)}$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.7$  e  $k \geq 1$ .

com  $\rho_2 = 10^{-6}$ . A escolha dos parâmetros envolvidos nessas atualizações foi baseada nas referências [12, 23, 33, 38] e em alguns testes numéricos preliminares.

## Resultados numéricos

A primeira comparação está relacionada ao número de iterações que cada uma das quatro variantes do algoritmo utiliza para satisfazer o critério de parada (2.8). A Figura 4.10 mostra a variação de

$$\max_{\ell=1,\dots,10} \{ \|(x_1^\ell)^k - \hat{x}^{k-1}\| \} \quad (4.5)$$

ao longo das iterações para cada uma das variantes do algoritmo. A curva em vermelho com pentagrama exibe a variação de (4.5) ao longo das iterações do algoritmo com o parâmetro de penalidade constante (**rhocte**), em azul com asterisco essa variação para o algoritmo com o parâmetro de penalidade atualizado conforme (2.5) (**rhocre**), em amarelo com triângulos a variação para o parâmetro de penalidade atualizado conforme (2.6) (**rhovar**) e por fim, em preto com círculos a variação para o parâmetro de penalidade atualizado conforme (2.7) (**rhodec**).

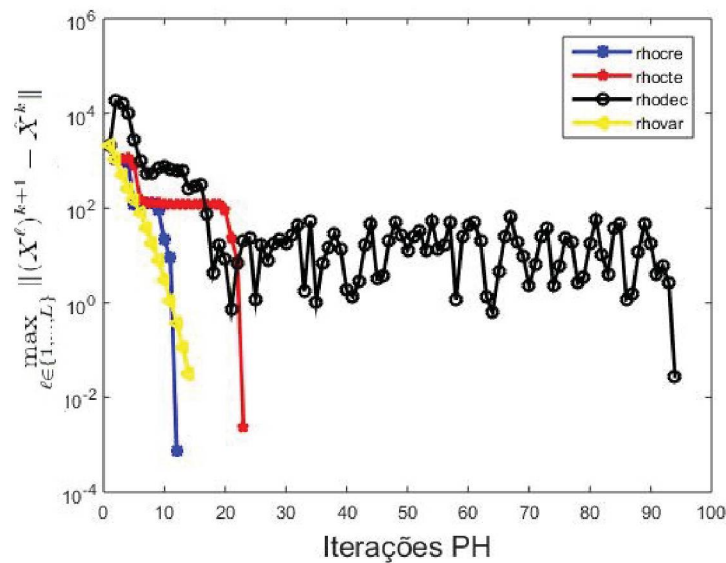


Figura 4.10: Variação de (4.5) ao longo das iterações das quatro variantes do PH.

Fonte: A autora

A variante que utilizou o menor número de iterações para satisfazer o critério de parada, foi a que atualiza o parâmetro de penalidade conforme (2.5) (**rhocre**). Note que este número difere pouco da variante que atualiza o parâmetro de penalidade conforme (2.6) (**rhovar**). Analisamos então, a média dos custos obtida por essas duas variantes. A Figura 4.11 mostra a variação da função objetivo do problema por iteração. Em amarelo com triângulos a média obtida pelo algoritmo com o parâmetro de penalidade conforme (2.6) (**rhovar**) e em azul com asterisco a média obtida pelo algoritmo com o parâmetro de penalidade atualizado conforme (2.5) (**rhocre**).

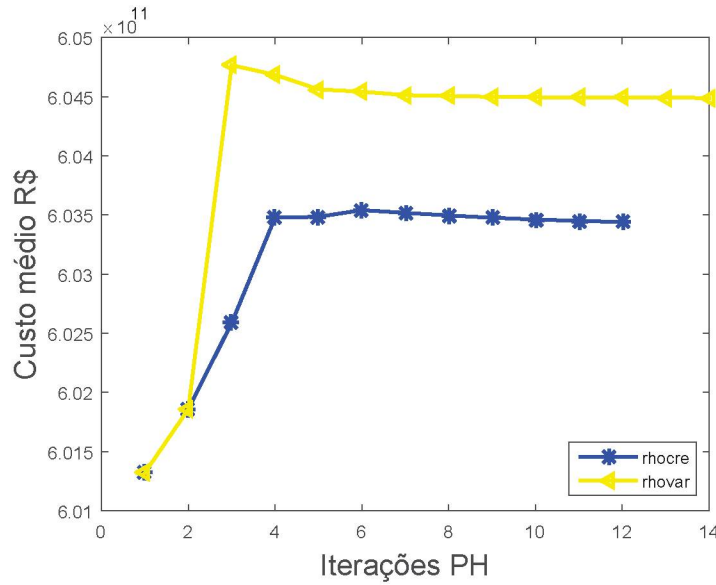


Figura 4.11: Custo médio obtido com as duas variantes.

Fonte: A autora

Como a média dos custos obtida pelo algoritmo com o parâmetro de penalidade atualizado conforme (2.5) (**rhocre**) foi a menor, esta atualização foi a escolhida. Desta forma, em toda a sequência do trabalho, o parâmetro de penalidade  $\rho$  no Algoritmo 2.1 foi atualizado, para todo  $k \geq 2$ ,

$$\rho_{k+1} = \tau \rho_k,$$

com  $\rho_2 = 10^{-6}$  e  $\tau = 1.2$ .

## 4.5 Comparação entre os métodos sem e com decomposição

Nesta seção apresentamos resultados numéricos para validação do Algoritmo 2.1, aqui denotado por PH - Progressive Hedging, comparando seu desempenho com um método sem decomposição, denotado por SD, proposto em [31]. Os dois algoritmos foram utilizados com os mesmos dados da seção anterior, ou seja, o problema de planejamento da operação do sistema com 21 usinas hidroelétricas, considerando horizonte de 12 meses, função de produção linear e os 10 cenários de afliências descritos na Seção 4.3.1.

Ambos os métodos utilizaram o algoritmo de filtro com a implementação cedida pelos autores de [29, 30]. Enquanto o método PH usa o algoritmo de filtro na resolução dos problemas determinísticos oriundos da decomposição, o método SD o usa na resolução do problema completo.

A comparação de desempenho do PH e SD é feita tanto na resolução do problema não antecipativo (3.20) sem inclusão de risco, como no problema (3.23) que considera aversão ao risco.

#### 4.5.1 Problema não antecipativo neutro ao risco

Ao se resolver o problema não antecipativo (3.20) estamos minimizando a média dos custos (3.4) para todos os cenários considerados, e obtemos, em particular, o valor do custo da operação associado a cada cenário. A Figura 4.12 mostra esses custos para as duas abordagens. Na figura da esquerda, os círculos vermelhos e os triângulos azuis representam, respectivamente, os custos ordenados obtidos pelos métodos PH e SD. A figura da direita mostra o valor absoluto da diferença desses custos em escala logarítmica, atingindo um máximo de  $2.3 \times 10^{-3}$ .

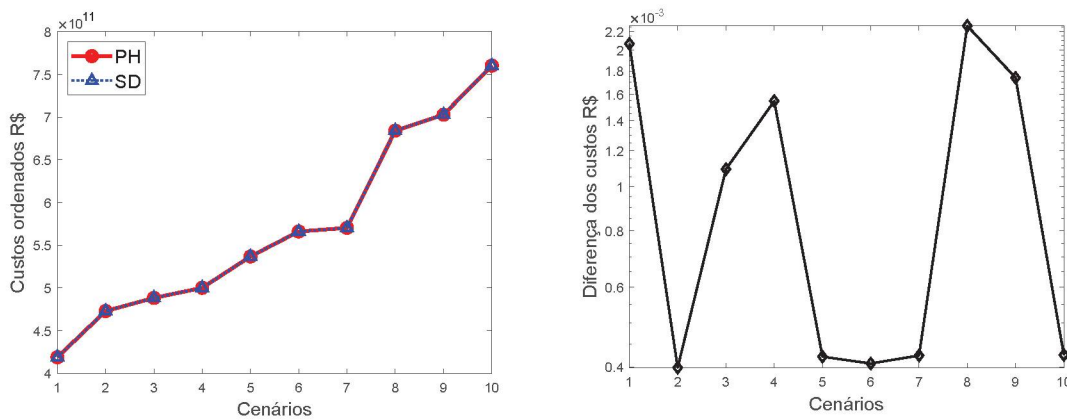


Figura 4.12: Comparação dos custos da operação obtidos por PH e SD.

Fonte: A autora

A Figura 4.13 exibe a potência total do sistema em [MW] composta pelas potências geradas pelas usinas térmicas (GT), pelas hidroelétricas (GH) e pelo déficit de potência (DEF). Para cada um dos 12 estágios de planejamento estão representadas duas colunas correspondentes aos dois métodos. A primeira coluna corresponde à potência calculada pelo método PH e a segunda pelo SD.

#### 4.5.2 Problema não antecipativo com aversão ao risco

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos com os mesmos dados do sistema considerado na seção anterior mas para a resolução do problema (3.23), onde fixamos  $\alpha = 0.7$  para o cálculo do  $CVaR_\alpha$ . A Figura 4.14 e a Tabela 4.5 mostram os custos de operação correspondentes a cada cenário obtidos pelas duas abordagens: PH e SD, com aversão ao risco. Na figura da esquerda, os círculos vermelhos e os triângulos azuis representam, respectivamente, os custos ordenados obtidos pelos métodos PH e SD. Note que, como tomamos  $\alpha = 0.7$ , ao resolvermos o problema (3.23), estamos minimizando a média dos custos dos 3 cenários mais caros, sem qualquer preocupação em relação aos custos dos demais cenários. Assim, apenas os custos da operação desses 3 cenários obtidos pelas duas metodologias devem ser próximos, que neste caso, são os custos correspondentes aos cenários de números 117, 188 e 70. A figura da direita mostra o valor absoluto da diferença desses três custos em escala logarítmica, atingindo um máximo de  $1.7 \times 10^{-3}$ .



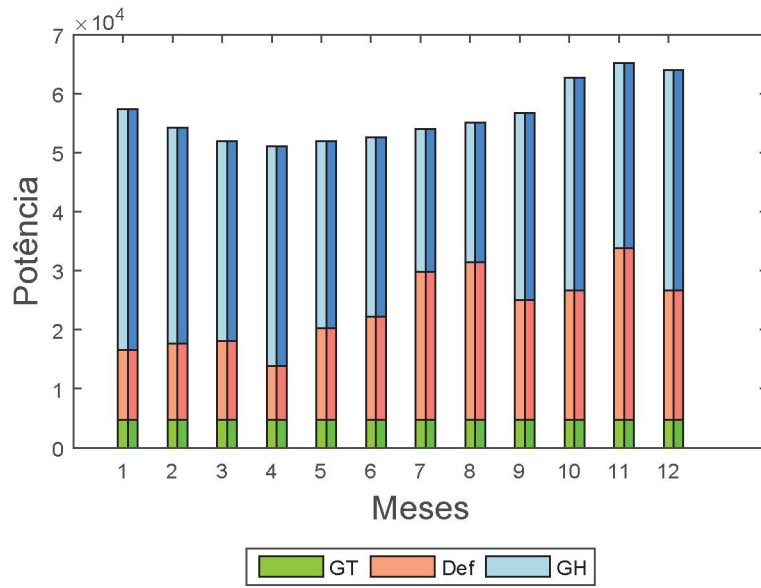


Figura 4.13: Potência pelos dois métodos.

Fonte: A autora

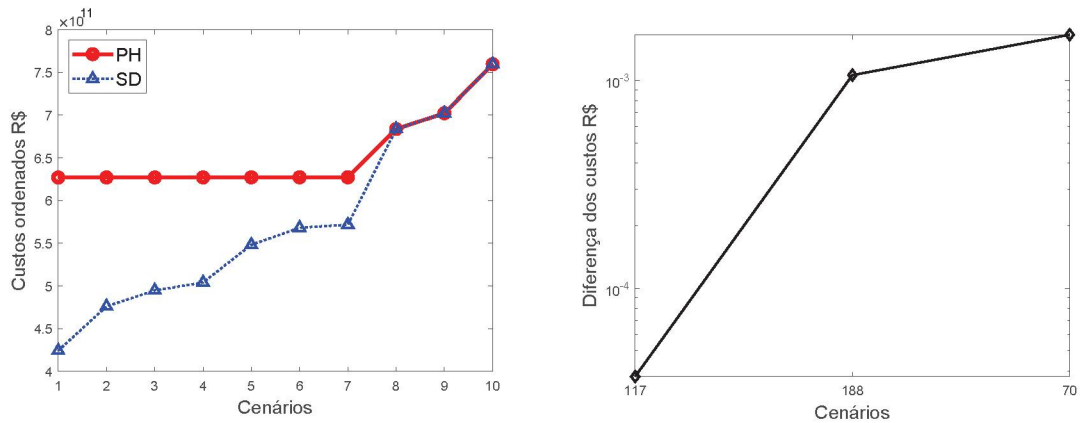


Figura 4.14: Comparação dos resultados obtidos por PH e SD com aversão ao risco.

Fonte: A autora

Pela Definição 1.4 e Teorema 1.23, o valor de  $VaR_\alpha$  corresponde ao menor dos minimizadores do problema (3.23). Ao resolver este problema, encontramos um minimizador, denotado por  $\overline{VaR}_\alpha$ , não necessariamente o menor deles. Dessa forma,  $\overline{VaR}_\alpha \geq VaR_\alpha$ . O valor mínimo do problema é  $CVaR_\alpha$  que é o foco de interesse. Note que os valores do  $CVaR_{0.7}$  para os dois métodos praticamente são os mesmos, que coincidem com a média dos custos correspondentes aos 3 piores cenários, como mostra a Tabela 4.5. Já os valores de  $\overline{VaR}_{0.7}$  não necessariamente coincidem, mas ambos estão coerentes, no sentido de que os custos dos três piores cenários superam esses valores.

Com estas comparações, concluímos que as duas metodologias fornecem resultados coerentes teoricamente, no sentido de que, as definições de  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  são respeitadas. Além disso, os custos dos piores cenários são praticamente coincidentes para ambas metodologias. Desta forma, consideramos que o método Progressive Hedging é aplicável ao problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos neutro ou com aversão ao risco, o que

Cenário	Método PH	Método SD
117	6.2696	4.2432
39	6.2706	4.7612
119	6.2708	4.9480
25	6.2711	5.0407
16	6.2719	5.4824
12	6.2725	5.6815
10	6.2726	5.7181
108	6.8367	6.8367
188	7.0222	7.0222
70	7.5961	7.5961
$CVaR_{0.7}$	7.1517	7.1517
$\overline{VaR}_{0.7}$	6.2739	5.7181

Tabela 4.5: Custos em  $[10^{11} R\$]$ .

Fonte: A autora

pode trazer um ganho computacional devido à possibilidade de paralelização. Os resultados computacionais apresentados nas próximas seções foram obtidos pelo método PH, a menos que algo contrário seja mencionado.

## 4.6 Comparação da função de produção linear e não linear

Vimos na Seção 3.2 que a não linearidade do problema de planejamento da operação (3.15) é devida à função de produção das usinas hidroelétricas dada por (3.11). A fim de testar e comparar métodos e fazer análises do sistema pode-se considerar um modelo linear para tal função, tomando a altura de queda  $HLiq$  constante para cada usina em (3.7). Nesse caso, o tempo computacional para resolver o problema reduz consideravelmente como veremos nessa seção, onde discutiremos a resolução do problema de planejamento da operação não antecipativo (3.20) sem e com aversão ao risco pelo método PH.

### 4.6.1 Sistema 21 com 10 cenários

Nesta seção resolvemos o problema de planejamento da operação do sistema com 21 usinas hidroelétricas, considerando horizonte de 24 meses e os 10 cenários de aflúências descritos na Seção 4.3.1.

Com estes dados, resolvemos o problema do planejamento não antecipativo (3.20), considerando a função de produção (3.11) tanto com sua modelagem não linear, como linear tomando altura de queda  $HLiq$  das usinas como constante. As duas situações foram também consideradas com aversão ao risco, ou seja, resolvemos o problema de planejamento não antecipativo com aversão ao risco (3.23) com  $\alpha = 0.7$ .

Ao resolver o problema não antecipativo, obtemos, em particular os custos da operação associados a cada um dos cenários considerados. A Tabela 4.6 apresenta esses custos obtidos em cada situação. A primeira coluna exibe o número que identifica os cenários conforme Seção 4.3.1. Esses cenários estão ordenados de acordo com os valores da segunda coluna que correspondem aos valores do custo esperado da operação sem risco com função de produção não linear. A terceira coluna exibe os custos sem risco com função de produção linear; a quarta e quinta colunas apresentam os custos com função de produção não linear e linear, respectiva-

mente, com aversão ao risco. A média dos custos do planejamento da operação sem risco referentes aos cenários é o valor da função objetivo do problema (3.20) representado na penúltima linha da tabela. Na última linha está indicado o valor da função objetivo do problema (3.23) que, como  $\alpha = 0.7$ , corresponde à média dos três maiores custos destacados em negrito na tabela.

Cenário	sem risco		avesso ao risco	
	não linear	linear	não linear	linear
39	1.1481	1.0105	1.4589	1.3325
119	1.1518	1.0009	1.4588	1.3325
10	1.2648	1.1111	1.4590	1.3327
25	1.3084	1.1737	1.4590	1.3327
117	1.3402	1.2329	1.4590	1.3328
12	1.4119	1.2990	1.4591	1.3329
16	1.4391	1.3102	1.4591	1.3329
108	1.4942	1.4052	<b>1.4920</b>	<b>1.4047</b>
70	1.7460	1.6739	<b>1.7436</b>	<b>1.6733</b>
188	1.8172	1.7603	<b>1.8153</b>	<b>1.7597</b>
Custo Médio	1.4122	1.2978		
$CVaR_{0.7}$			1.6836	1.6126

Tabela 4.6: Custos em  $[10^{12} R\$]$ .

Fonte: A autora

Enquanto o tempo computacional do algoritmo na resolução dos problemas com função de produção linear foi cerca de 3 minutos, esse tempo para o caso não linear foi de aproximadamente 20 minutos. Embora o tempo reduza consideravelmente ao se considerar função de produção linear, o erro relativo no valor da função objetivo é da ordem de 8%, no caso sem risco e de 4% com aversão ao risco, em comparação com o valor da função objetivo do problema considerando função de produção não linear que é mais próxima da realidade.

#### 4.6.2 Sistema 21 com 100 cenários e aversão ao risco

Nesta seção apresentamos resultados semelhantes aos da seção anterior para o problema com aversão ao risco mas com um horizonte maior de planejamento e um número maior de cenários. Consideramos os resultados da resolução do problema de planejamento da operação do sistema com 21 usinas hidroelétricas com horizonte de 48 meses e os 100 cenários de aflúências descritos na Seção 4.3.1. Com este dados, resolvemos o problema não antecipativo com aversão ao risco (3.23), com  $\alpha = 0.7$ . A Figura 4.15 exibe o custo total da operação correspondente a cada um dos 100 cenários, para os dois modelos da função de produção hidráulica. Em linha cheia vermelha, estão representados esses custos ordenados considerando função de produção não linear. Em azul e tracejado, os custos tomando função de produção linear. O valor do  $VaR_{0.7}$ , em cada um dos casos, está indicado por um triângulo. As linhas pontilhadas indicam o valor de  $CVaR_{0.7}$  que corresponde à média dos valores dos custos que superam o valor de  $VaR_{0.7}$ .

Essas informações estão sintetizadas na Tabela 4.7 que exibe o valor de  $CVaR_{0.7}$ ,  $VaR_{0.7}$  e o tempo de execução do algoritmo para o problema com função de produção hidráulica (3.11) no seu modelo não linear e linear. O erro relativo nos custos considerando a função de produção linear ficou na ordem de 4% quando comparados aos custos referentes à função de produção não linear que foram obtidos com tempos computacionais bastante superiores. As aproximações obtidas pelo caso linear podem ser úteis em algumas análises, como por exemplo na discussão de



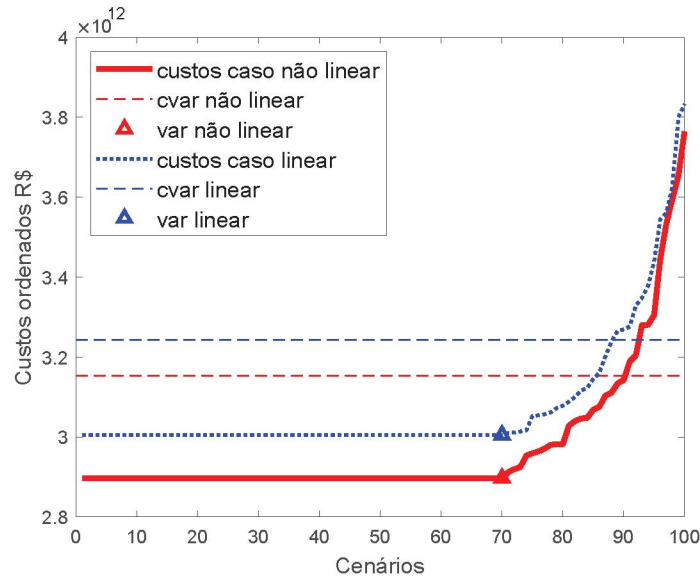


Figura 4.15: Comparação entre os custos ordenados.

Fonte: A autora

estratégias para redução do número de cenários a serem considerados no problema não antecipativo, como veremos na Seção 4.9.

informação	não linear	linear	unidade
$CVaR_{0.7}$	3.1530	3.2422	$10^{12}$ R\$
$VaR_{0.7}$	2.8967	3.0048	$10^{12}$ R\$
cpu	1200	70	min

Tabela 4.7: Resultados do problema do planejamento da operação com inclusão ao risco com função de produção hidráulica não linear e linear.

Fonte: A autora

## 4.7 Três metodologias de aversão ao risco

Na Seção 3.4 discutimos três abordagens para inclusão de aversão ao risco no problema de planejamento da operação. A primeira consiste em considerar  $CVaR_\alpha$  no custo total, como descrito na Seção 3.4.1, a outra apenas na parcela do custo do déficit, como apresentado na Seção 3.4.2 e a última é dada pela combinação convexa entre a esperança e o próprio  $CVaR_\alpha$ , ambos do custo total, como discutido na Seção 3.4.3. Nesta seção, discutimos resultados numéricos preliminares usando as três estratégias com aversão ao risco para fixar a interpretação do  $CVaR_\alpha$ . Para tanto, consideramos o problema de planejamento da operação para o sistema de 21 usinas hidroelétricas com horizonte de 12 meses, função de produção hidráulica (3.11) linear e os 10 cenários discutidos na Seção 4.3.1. Em todos os casos, fixamos o valor de  $\alpha = 0.7$  para o cálculo de  $CVaR_\alpha$  correspondente. Não é comum na literatura adotar um nível de confiança tão baixo, mas ele foi considerado por causa do número reduzido de cenários. Níveis de confiança maiores, como  $\alpha = 0.9$  ou  $0.95$ , que são mais comuns, serão abordados em testes com problemas maiores.



### 4.7.1 Risco no custo total

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos para resolução do problema (3.23), que considera a medida de aversão ao risco  $CVaR_\alpha$  no custo total, como descrita na Seção 3.4.1.

A Figura 4.16 exibe os custos da operação correspondentes a cada cenário ao longo das iterações do método PH na resolução do problema (3.23). As linhas contínuas em preto representam a evolução dos custos totais da operação correspondentes a cada cenário. O início destas curvas representa o custo ótimo de cada cenário, já que na primeira iteração do algoritmo PH resolve-se o problema determinístico (3.15) para cada um dos 10 cenários. A curva em azul com asteriscos mostra o valor do  $CVaR_{0.7}$  e a curva com círculos em vermelho mostra o valor do  $VaR_{0.7}$  em cada iteração. Como  $\alpha = 0.7$ , temos 70% de confiança de que os custos dos cenários não irão ultrapassar o valor do  $VaR_{0.7}$ , ou seja, 7 das 10 curvas pretas têm ao final do algoritmo custo inferior ao valor da curva vermelha, como podemos observar na figura da direita que é uma visão ampliada do que ocorre nas últimas iterações. Por outro lado, o valor do  $CVaR_{0.7}$  corresponde à média dos custos dos outros 3 cenários, ou seja, dos 30% piores cenários. A Figura 4.17 destaca essas observações, mostrando os resultados na última iteração do PH. Em preto estão representados os custos ordenados correspondentes a cada cenário; em vermelho, o valor do  $VaR_{0.7}$  e em azul o valor do  $CVaR_{0.7}$ .

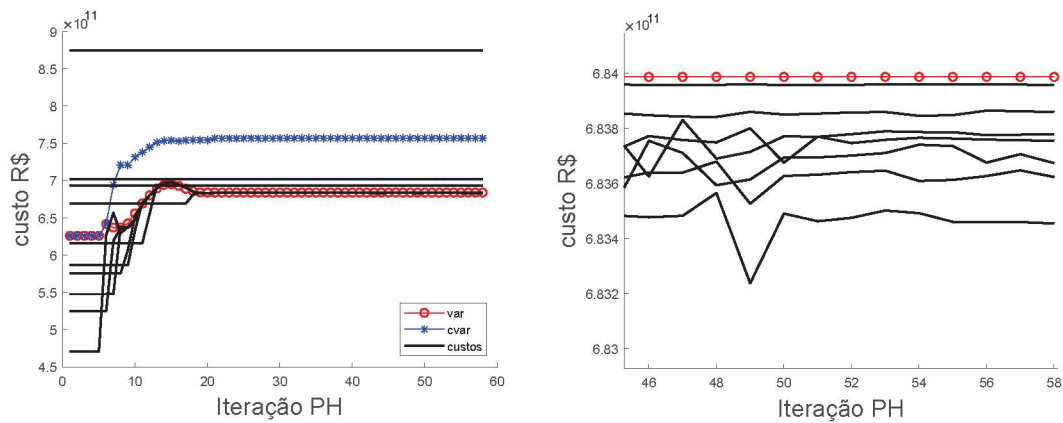


Figura 4.16: Custos ao longo das iterações do PH, com nível de confiança 70%.

Fonte: A autora

O  $VaR_\alpha$  e o  $CVaR_\alpha$  trazem informações importantes em relação ao custo da operação. Temos um limitante inferior para os custos em um nível de confiança pré-estabelecido, que é o  $VaR_\alpha$  e também uma estimativa média para os custos mais altos da operação, que é o  $CVaR_\alpha$ .

### 4.7.2 Risco no déficit

Nesta seção discutimos resultados numéricos na resolução do problema (3.24) que considera aversão ao risco na parcela do déficit, como discutida na Seção 3.4.2. O interesse neste caso é a análise da parcela referente ao déficit, lembrando que a função custo  $f$  apresentada em (3.4) é composta pela soma de três parcelas relativas ao custo: das térmicas, do déficit e dos intercâmbios. Entre estas, a parcela que oferece maior risco na política operativa é o custo do déficit de energia. Diante disso, é de interesse analisarmos as informações que o  $CVaR_\alpha$  e o  $VaR_\alpha$  fornecem neste caso.

A Figura 4.18 mostra em linhas contínuas pretas a variação dos custos de déficit ao longo das iterações do algoritmo PH na resolução do problema (3.24). A curva em azul com

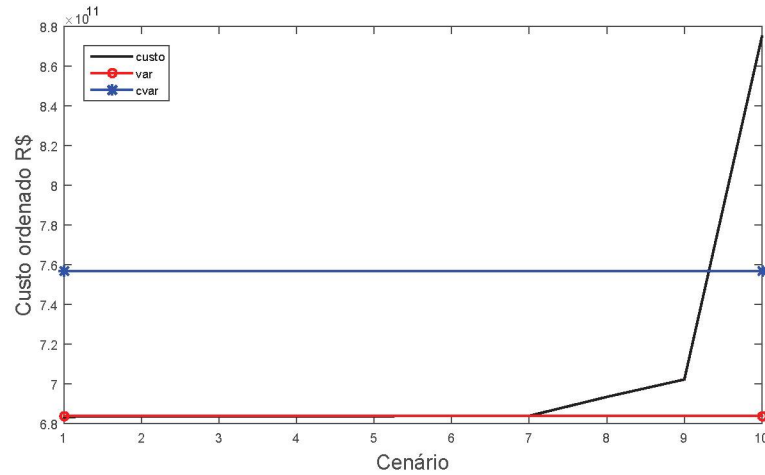


Figura 4.17: Custos ordenados.

Fonte: A autora

asteriscos mostra o valor do  $CVaR_{0.7}$  e a curva com círculos em vermelho mostra o valor do  $\overline{VaR}_{0.7}$  em cada iteração como considerado na Seção 3.4.2.

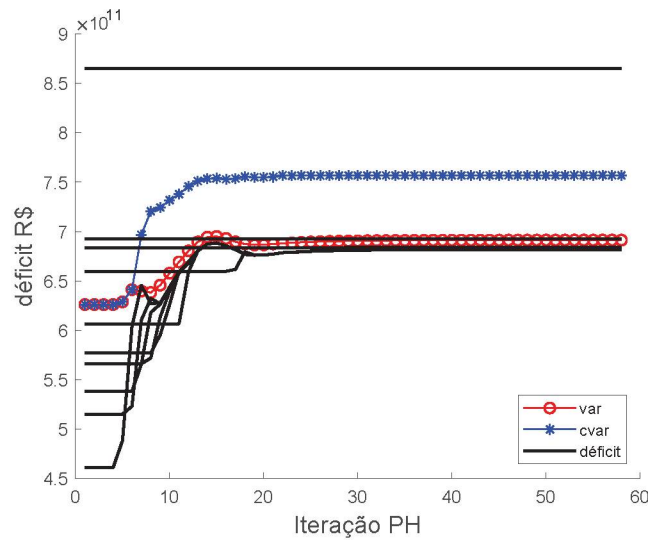


Figura 4.18: Custos dos déficits ao longo das iterações do PH, com nível de confiança 70%.

Fonte: A autora

Obtemos neste caso um limitante inferior para os custos dos déficits em um nível de confiança de 70% que seria o  $\overline{VaR}_{0.7}$  e também uma estimativa média para os déficits mais altos, que seria o  $CVaR_{0.7}$ . Estas informações podem auxiliar no planejamento para evitar déficits elevados.

### 4.7.3 Combinação convexa

Nesta seção discutimos resultados numéricos do problema de planejamento da operação do sistema hidrotérmico com risco dado pela combinação convexa da esperança da função custo e da medida de risco  $CVaR_{\alpha}$ , como discutida na Seção 3.4.3.

São consideradas três situações distintas: a primeira neutra ao risco, e duas que consideram a combinação convexa como em (1.25) com valores distintos para o parâmetro  $\beta$  (0.5

e 0.9). A Figura 4.19 mostra a evolução dos custos totais de planejamento da operação correspondente a cada um dos cenários ao longo das iterações de PH, para cada uma das situações conforme descritas a seguir:

- Valores dos custos ao longo das iterações de PH na resolução do problema (3.20) neutro ao risco, indicados por losangos ( $\diamond$ );
- Valores ao longo das iterações de PH na resolução do problema (1.25), com parâmetro  $\beta = 0.5$  na combinação convexa, em que:
  - Estrelas ( $\star$ ): representam os custos correspondentes aos cenários;
  - Asteriscos (\*):  $CVaR_{0.7}$ ;
  - Círculos ( $\circ$ ):  $VaR_{0.7}$ .
- Valores ao longo das iterações de PH na resolução do problema (1.25), com parâmetro  $\beta = 0.9$  na combinação convexa, em que:
  - Quadrados ( $\square$ ): representam os custos correspondentes aos cenários;
  - Sinais de mais (+):  $CVaR_{0.7}$ ;
  - Triângulos ( $\triangleleft$ ):  $VaR_{0.7}$ .

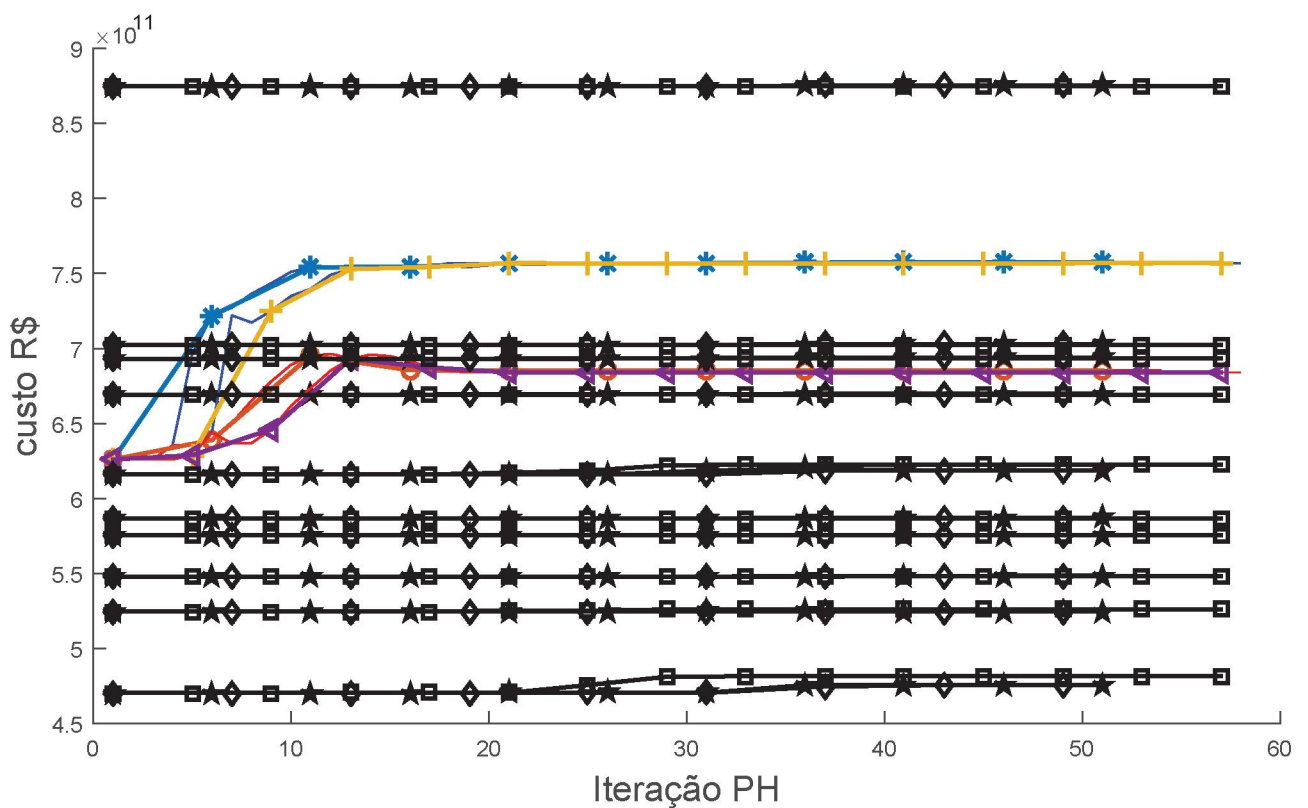


Figura 4.19: Comparação entre os custos obtidos pela abordagem sem aversão ao risco e pela combinação convexa entre a esperança e a medida de risco  $CVaR_{\alpha}$ .

Fonte: A autora

A Tabela 4.8 exibe os custos totais da operação correspondentes a cada cenário obtidos através de cada metodologia.



Cenário	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	sem risco
16	4.7566	4.8154	4.7566
119	5.2464	5.2622	5.2465
39	5.4857	5.4822	5.4842
25	5.7571	5.7569	5.7571
12	5.8718	5.8688	5.8703
10	6.1883	6.2263	6.1884
108	6.6987	6.6927	6.6987
117	6.9400	6.9352	6.9419
188	7.0289	7.0228	7.0291
70	8.7543	8.7490	8.7528
$CVaR_{0.7}$	7.5744	7.5690	-

Tabela 4.8: Custos em  $[10^{11} R\$]$ .

Fonte: A autora

Nossa conjectura é de que os valores dos custos da operação, quando se considera uma combinação convexa da esperança da função custo e do  $CVaR_{\alpha}$ , assumem valores muito próximos aos custos sem considerar risco, independente do valor do parâmetro  $\beta$  adotado na combinação. Essa conjectura é corroborada pelos testes numéricos apresentados nesta seção.

#### 4.7.4 Simulação

Nas seções anteriores discutimos uma interpretação das três abordagens para inclusão de aversão ao risco no problema do planejamento, apresentadas na Seção 3.4. Nesta seção discutimos as soluções obtidas na resolução do problema do planejamento com aversão ao risco para duas dessas abordagens. Pelos experimentos numéricos preliminares apresentados na seção anterior, a estratégia discutida na Seção 3.4.3 sobre a combinação convexa da esperança e da medida de risco  $CVaR$ , ambas relativas à função custo, não apresentou diferenças significativas em relação à abordagem neutra ao risco, desta forma esta estratégia foi desconsiderada. Sendo assim, os testes apresentados nesta seção são relativos ao problema do planejamento hidrotérmico com risco no custo total, como descrito na Seção 3.4.1 e risco apenas na parcela do custo do déficit, como apresentado na Seção 3.4.2.

Os testes numéricos discutidos aqui são em relação à resolução do problema de planejamento da operação com aversão ao risco no custo total (3.23) e no custo do déficit (3.24) do sistema de 21 usinas hidroelétricas descrito na Seção 4.2.2, com os 10 cenários de aflúências selecionados na Seção 4.3.1, horizonte de planejamento de 33 meses a partir do mês de abril do ano de 1957, permitindo esvaziar os reservatórios no último período e função de produção linearizada. Como a segunda estratégia considera risco apenas na parcela do déficit, estressamos o sistema, aumentando a demanda fornecida pelo ONS em 10%, de modo a aumentar a possibilidade de existência de déficits.

A Figura 4.20 mostra os custos mensais (esquerda) e acumulados (direita) para cada mês da simulação para as duas estratégias. Em linha contínua, vermelha com círculos estão representados os custos obtidos pela resolução do problema considerando risco no déficit (3.24). Já os custos obtidos pela simulação na resolução do problema considerando aversão ao risco no custo total (3.23) estão representados em linha pontilhada, com estrelas azuis.

A Figura 4.21 mostra gráficos de barras das potências hídrica (azul), termoeletrica (verde) e déficit (vermelho) do sistema para o cenário iniciado em 1957. A curva preta representa a demanda. As barras da esquerda correspondem à decisão dessas potências obtidas pela



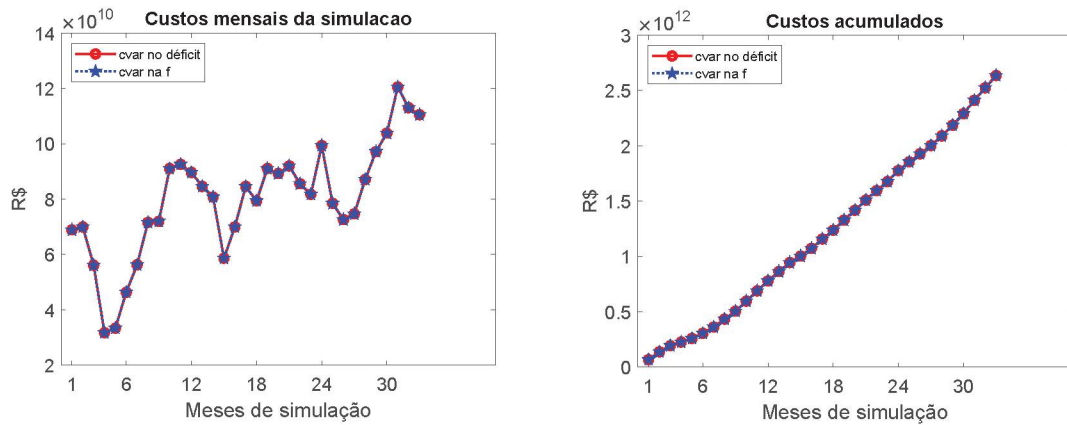


Figura 4.20: Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita).

Fonte: A autora

resolução do problema do planejamento da operação do sistema (3.24) com risco no déficit, enquanto as barras da direita correspondem à resolução do problema com aversão ao risco na função custo total (3.23). Neste caso, as térmicas estão gerando o máximo de energia possível.

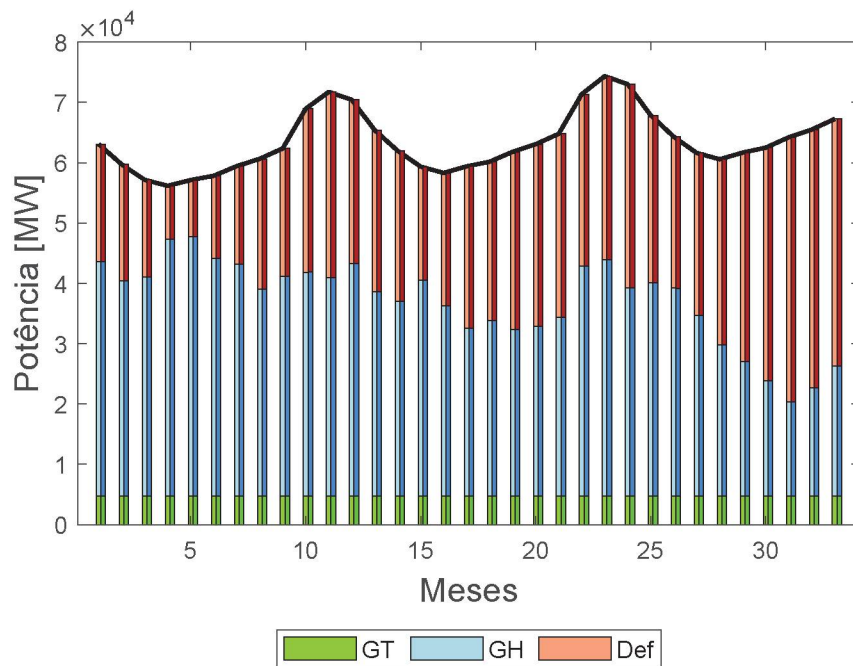


Figura 4.21: Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957 e demanda aumentada em 10%. As barras da esquerda correspondem às decisões aversas ao risco no déficit e da direita aversas ao risco no custo total.

Fonte: A autora

Além dos custos e das gerações, comparamos também a decisão obtida em cada uma das situações, ou seja, analisamos o vertimento e o turbinamento de cada usina com reservatório. A vazão vertida em ambas as situações foram nulas. A Figura 4.22 mostra a decisão do primeiro mês relativa à vazão turbinada para as usinas com reservatório resultante da resolução do problema com risco no déficit, em linha pontilhada vermelha com círculo e do problema com risco na função custo total, em linha contínua azul com círculo.

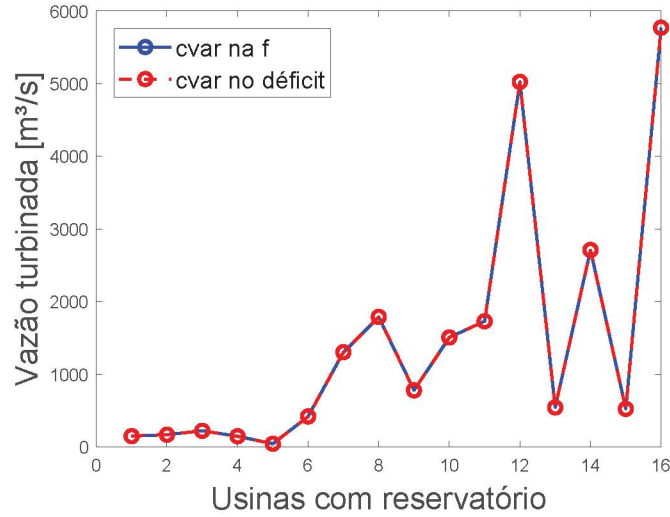


Figura 4.22: Vazões turbinadas resultantes dos problemas com aversão ao risco.

Fonte: A autora

A partir dessas análises percebemos que os resultados obtidos para ambas as estratégias de inclusão de aversão ao risco no problema do planejamento são análogas. Tendo em vista que a inclusão de aversão ao risco no custo do déficit só faz sentido quando este ocorre, vamos considerar na sequência do trabalho a inclusão de aversão ao risco apenas no custo total.

## 4.8 Influência de fixar a decisão do primeiro mês

Dado um conjunto  $\{Y^1, \dots, Y^L\}$  de cenários de afluições, comparamos os custos de planejamento da operação dos problemas determinísticos com o custo do problema não antecipativo, a fim de analisar a influência de fixar a decisão do primeiro mês para o custo do planejamento. Na Seção 4.8.1 discutimos quatro situações distintas, enquanto na Seção 4.8.2 apresentamos alguns experimentos numéricos comparando resultados obtidos a partir de cada uma das situações.

### 4.8.1 Situações analisadas

Nesta seção apresentamos quatro situações distintas de obter e fixar a decisão do primeiro mês no problema de planejamento da operação de um sistema hidrotérmico.

- **Situação 1**

Para cada cenário  $Y^\ell \in \{Y^1, \dots, Y^L\}$  resolvemos o problema determinístico (3.15) sintetizado como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x_1, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (x_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \end{aligned}$$

em que  $f : \mathbb{R}^{n^T} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função custo do problema do planejamento da operação e  $\Gamma_\ell \subset \mathbb{R}^{n^T}$  é o conjunto viável relacionado ao cenário  $Y^\ell$ . Obtemos assim o custo ótimo do planejamento para cada cenário.

- **Situação 2**

Fixado  $\alpha \in (0, 1)$ , resolvemos o problema do planejamento da operação hidrotérmica não antecipativo com aversão ao risco (3.23) na função custo. O interesse neste caso é minimizar a média dos  $L(1 - \alpha)$  maiores custos, sem se preocupar com os custos associados aos demais  $p$  cenários. Resolvido o problema, obtemos o custo do planejamento de cada cenário, a decisão do primeiro mês  $x_1^*$  e os valores de  $CVaR_\alpha$  e  $\overline{VaR}_\alpha$ .

### • Situação 3

Resolvemos novamente o problema determinístico (3.15) para o caso do planejamento hidrotérmico, mas agora com uma restrição a mais, a restrição de que a decisão do primeiro mês seja a decisão  $x_1^*$  obtida pela Situação 2, ou seja, para cada cenário  $Y^\ell \in \{Y^1, \dots, Y^L\}$  resolve-se o seguinte problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x_1^*, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (x_1^*, y^\ell) \in \Gamma_\ell. \end{aligned}$$

Feito isso, temos o custo do planejamento da operação para cada cenário com esta nova restrição. Obviamente que o custo obtido aqui é maior ou igual ao custo obtido pelo problema do planejamento hidrotérmico determinístico sem considerar esta nova restrição, ou seja, obtido na Situação 1.

### • Situação 4

Da Situação 2 obtemos o valor de  $\overline{VaR}_\alpha$  e conseqüentemente os  $L(1 - \alpha)$  cenários que fornecem custos acima deste valor. Para estes cenários resolve-se o problema do planejamento hidrotérmico não antecipativo dado por

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{L(1 - \alpha)} \sum_{\ell=1}^{L(1-\alpha)} f(\bar{x}_1, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (\bar{x}_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Obtemos então a decisão do primeiro mês  $\bar{x}_1^*$ . Com esta decisão fixada, resolve-se o problema determinístico (3.15) para o planejamento hidrotérmico para cada um dos  $L$  cenários considerados inicialmente, ou seja, resolve-se cada um dos  $L$  problemas da forma

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\bar{x}_1^*, y^\ell) \\ & \text{sujeito a} && (\bar{x}_1^*, y^\ell) \in \Gamma_\ell. \end{aligned}$$

Temos então o custo do planejamento para cada cenário com esta nova restrição. Note que a Situação 4 usa uma informação fornecida pela Situação 2, assumindo conhecidos os  $L(1 - \alpha)$  cenários associados aos maiores custos, e melhora os custos dos demais.

Denotando por  $f_{sitj}(x_1, y^\ell)$  o custo do planejamento da operação associado ao cenário  $Y^\ell$  obtido pela situação  $n$ , para  $j = 1, \dots, 4$ , temos as seguintes relações:

$$f_{sit1}(x_1, y^\ell) \leq f_{sit3}(x_1, y^\ell) \leq f_{sit2}(x_1, y^\ell) \quad (4.6)$$

$$f_{sit1}(x_1, y^\ell) \leq f_{sit4}(x_1, y^\ell) \leq f_{sit2}(x_1, y^\ell), \quad (4.7)$$

conforme verificaremos nos experimentos numéricos a seguir.



#### 4.8.2 Experimentos numéricos

Apresentamos experimentos numéricos para as quatro situações na resolução do problema de planejamento da operação para o Sistema 21, função de produção hidráulica linear, o conjunto de 10 cenários descrito na Seção 4.3.1, permitindo esvaziar os reservatórios no final do planejamento e  $\alpha = 0.7$  para cálculo de  $CVaR_\alpha$ , considerando três horizontes: de 9, 21 e 33 meses.

A Tabela 4.9 exibe o custo do planejamento para cada um dos 10 cenários obtido pela resolução de cada situação especificada acima, com horizonte de 9 meses. Estes custos estão exibidos em ordem crescente do custo obtido pela resolução do problema do planejamento hidrotérmico determinístico, ou seja, da Situação 1. Note que as relações (4.6) valem, e obviamente os menores custos ocorrem na Situação 1. A única inversão na ordenação dos custos ocorre nas Situações 3 e 4 em que os custos referentes aos cenários 119 e 188 se permutam de posição. Notamos ainda que os custos associados aos 3 piores cenários são praticamente iguais independente da situação analisada.

Ordem	Cenários	Custos em [ $10^{11}$ R\$]			
		Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4
1	12	2.8298	3.7421	2.8298	2.8298
2	39	2.9150	3.7425	2.9323	2.9323
3	16	3.0954	3.7429	3.1633	3.1633
4	25	3.2374	3.7435	3.2374	3.2374
5	119	3.3028	3.7438	3.3707	3.3707
6	188	3.3374	3.7439	3.3374	3.3374
7	108	3.4086	3.7442	3.4293	3.4293
8	10	3.7025	3.7459	3.7459	3.7459
9	117	3.9073	3.9073	3.9073	3.9073
10	70	4.4813	4.4861	4.4861	4.4861

Tabela 4.9: Custos totais associados a cada cenário para as quatro situações com horizonte de 9 meses.

Fonte: A autora

A Figura 4.23 exibe os custos por cenários obtidos em cada situação com horizonte de 9 meses. A linha tracejada em rosa representa os custos em ordem crescente do custo obtido pela resolução do problema determinístico, ou seja, da Situação 1. A linha contínua em preto com estrela representa os custos obtidos pela Situação 2; a linha pontilhada em verde com losangos representa os custos obtidos pela Situação 3, e por fim, a linha pontilhada em azul representa os custos obtidos pela Situação 4. Os valores de  $CVaR_{0.7}$  e  $\overline{VaR}_{0.7}$ , obtidos pela Situação 2, estão indicados por linhas contínuas com círculos, em azul e vermelho, respectivamente. Note que temos 7 cenários que fornecem custos menores que  $\overline{VaR}_{0.7}$  e o valor de  $CVaR_{0.7}$  registra a média dos três maiores custos.

Cabe ressaltar que a Situação 2 obtém uma decisão que minimiza o custo dos  $L(1 - \alpha)$  piores cenários, sem levar em consideração os custos dos demais  $\alpha L$  cenários exigindo apenas a viabilidade em relação a eles. Assim, a Situação 2 não fornece bons resultados para os cenários com custos abaixo do  $\overline{VaR}_{0.7}$ . Se o operador tiver interesse no custo do planejamento para qualquer um dos  $L$  cenários, uma sugestão seria utilizar a Situação 3, ou seja, dada a decisão obtida da minimização dos  $L(1 - \alpha)$  piores cenários resolve-se o determinístico para os outros cenários com a decisão do primeiro mês fixada. Assim, obtemos o custo mais adequado para o planejamento considerando os melhores cenários para um problema não antecipativo. Note que as soluções obtidas pela Situação 3 e pela Situação 4 são muito próximas, mostrando que



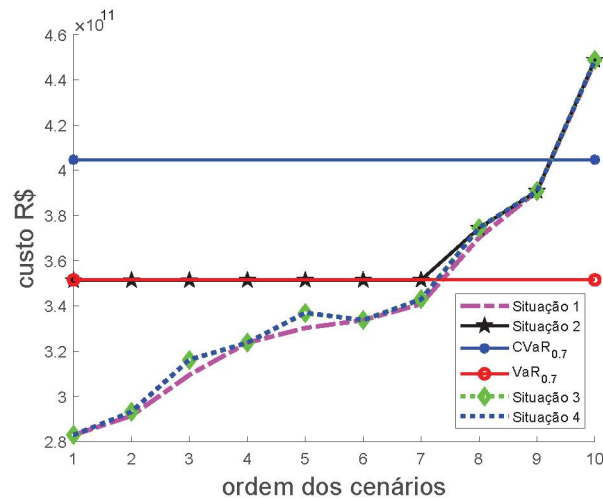


Figura 4.23: Custos associados aos cenários para as quatro situações com horizonte de 9 meses.  
Fonte: A autora

se tivermos a informação de quais são os piores cenários, podemos resolver um problema mais simples, que seria o problema da Situação 4, e mesmo assim obter uma decisão viável para todos os outros cenários.

Resolvemos as quatro situações novamente mas modificando o período de planejamento. A Figura 4.24 é análoga à Figura 4.23 mas para horizonte de 21 meses e 33 meses. É interessante perceber que quanto maior o período de planejamento, menor a influência que a decisão fixada do primeiro mês causa no custo do planejamento da operação, visto que os custos obtidos pelas Situações 1, 3 e 4 praticamente coincidem.

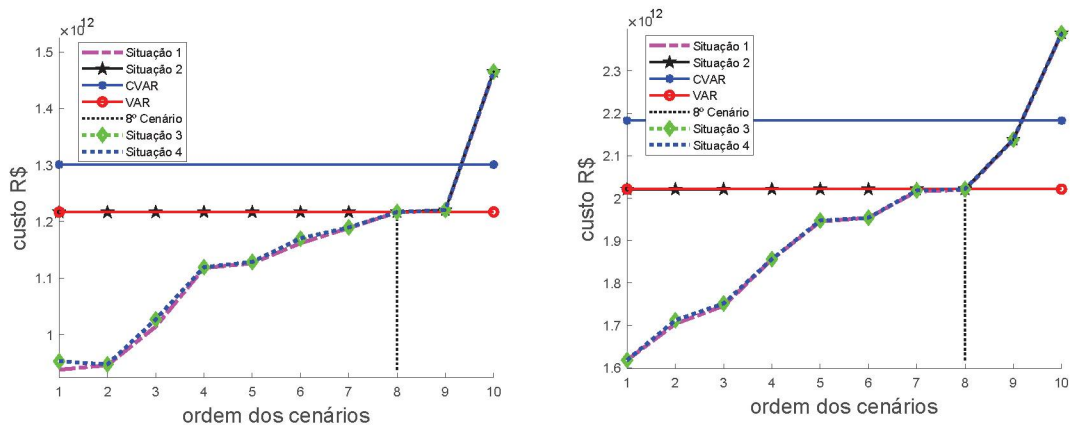


Figura 4.24: Custos associados aos cenários para as quatro situações com horizonte de 21 (esquerda) e 33 meses (direita).  
Fonte: A autora

## 4.9 Estratégias de redução de número de cenários

A partir de um conjunto de  $L$  cenários, desejamos encontrar um subconjunto de cenários irrelevantes, como discutido na Seção 1.4, de modo que uma decisão obtida considerando o conjunto

reduzido (complementar ao conjunto de cenários irrelevantes) seja tão confiável quanto uma decisão tomada com aversão ao risco a partir do conjunto original de cenários.

Esta seção, uma das contribuições da tese, apresenta duas técnicas para a seleção de cenários a serem considerados no problema não antecipativo. A primeira técnica consiste em selecionar os cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos e a segunda, inspirada pelo Teorema 1.28, consiste em selecionar cenários a partir de uma solução aproximada do problema não antecipativo. Para obter essa solução aproximada no contexto do problema de planejamento da operação com a função de produção hidráulica não linear (3.11), resolvemos o problema com uma linearização dessa função. Na Seção 4.9.1 discutimos a estratégia geral que considera as duas técnicas para seleção dos cenários. Na Seção 4.9.2 apresentamos a técnica que seleciona os cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos, enquanto a Seção 4.9.3 discute a técnica baseada na obtenção de soluções aproximadas do problema.

### 4.9.1 Algoritmo geral para seleção de cenários

Nesta seção apresentamos um algoritmo geral para seleção de cenários que invoca uma técnica para efetuar tal seleção. Nas seções seguintes discutimos duas técnicas possíveis.

#### Algoritmo 4.1 Seleção de cenários relevantes

*Dados: um conjunto de  $L$  cenários,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\bar{q} = L(1 - \alpha)$*

*Repita*

*Escolha um natural  $q \in (\bar{q}, L)$ .*

*Selecione um conjunto de  $q$  cenários a partir de uma técnica de redução de cenários. Seja  $\mathcal{Q}$  o conjunto dos índices dos cenários selecionados.*

*Calcule  $\alpha' = \frac{q - L(1 - \alpha)}{q}$ .*

*Resolva o problema (3.23), com  $\alpha = \alpha'$  e  $L = q$ , ou seja,*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \left\{ z + \frac{1}{q(1 - \alpha')} \sum_{\ell \in \mathcal{Q}} g_\ell \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{aligned} & (\bar{x}_1, y^\ell) \in \Gamma_\ell, & \ell \in \mathcal{Q} \\ & g_\ell \geq 0, & \ell \in \mathcal{Q} \\ & g_\ell - f(\bar{x}_1, y^\ell) + z \geq 0 & \ell \in \mathcal{Q}, \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.8)$$

*e obtenha uma decisão  $\bar{x}_1$  para o primeiro mês e  $\overline{VaR}_{\alpha'}$ .*

*Se  $\bar{x}_1$  é viável para o problema (4.8) com  $\{1, \dots, L\} \setminus \mathcal{Q}$  no lugar de  $\mathcal{Q}$  e  $f(\bar{x}_1, y^\ell) \leq \overline{VaR}_{\alpha'}$  para todo  $\ell \in \{1, \dots, L\} \setminus \mathcal{Q}$ , então PARE com o conjunto  $\mathcal{Q}$  de índices dos  $q$  cenários selecionados. Caso contrário, faça  $\bar{q} = q$ .*

Se o critério de parada é satisfeito, significa que extraímos do conjunto original o subconjunto  $\mathcal{Q}$  associado aos índices de cenários relevantes. Caso contrário, os cenários correspondentes aos custos acima de  $\overline{VaR}_{\alpha'}$  não podem ser considerados irrelevantes. Portanto, o processo é repetido, aumentando-se o valor de  $q$  que corresponde ao número de cenários relevantes.

A seguir discutimos duas técnicas de redução de cenários que podem ser usadas no segundo passo do algoritmo.

### 4.9.2 Seleção a partir das soluções dos problemas determinísticos

Nesta seção discutimos a técnica de redução de cenários que consiste em resolver os  $L$  problemas determinísticos (3.15) associados a cada um dos  $L$  cenários e selecionar o conjunto  $\mathcal{Q}$  como os índices dos  $q$  cenários que fornecem os maiores custos de operação.

#### Experimentos com o sistema de 21 hidroelétricas

Aplicamos essa técnica na resolução do problema de planejamento da operação do sistema de 21 usinas hidroelétricas, com horizonte de 9 meses e o conjunto dos  $L = 100$  cenários discutidos na Seção 4.3.1. Resolvemos, inicialmente, o problema do planejamento hidrotérmico determinístico (3.15) com a função de produção hidráulica não linear para os 100 cenários. Ordenamos os custos de operação obtidos e selecionamos os  $q = 30$  cenários que forneceram os maiores custos para formar o conjunto  $\mathcal{Q}$ . Resolvemos então o problema (4.8) com a função de produção hidráulica não linear, considerando este conjunto de 30 piores cenários.

A Tabela 4.10 apresenta os valores de  $CVaR_\alpha$ ,  $\overline{VaR}_\alpha$ , e o tempo computacional obtidos pela resolução do problema original (3.23), com 100 cenários e  $\alpha = 0.8$ ; e do problema reduzido (4.8), com os 30 cenários selecionados e  $\alpha' = 1/3$ . Note que o tempo de execução para o problema reduzido inclui o tempo de resolução dos 100 problemas determinísticos para a seleção dos 30 cenários. O valor absoluto da diferença relativa do  $CVaR_\alpha$  é de 0.023.

	Problema original $L = 100, \alpha = 0.8$	Problema reduzido $q = 30, \alpha' = 1/3$
$CVaR_\alpha$	$5.1125 \times 10^{11}$	$5.2332 \times 10^{11}$
$\overline{VaR}_\alpha$	$4.6774 \times 10^{11}$	$4.2935 \times 10^{11}$
Tempo [min]	55	13

Tabela 4.10: Comparação entre  $CVaR_\alpha$  e  $\overline{VaR}_\alpha$  para os problemas (3.23) e (4.8) com função de produção não linear.

Fonte: A autora

Analisaremos agora a decisão do primeiro mês obtida em cada problema. A Figura 4.26 mostra a vazão turbinada e a vazão vertida para o primeiro mês para as 16 usinas com reservatório obtidas resolvendo-se o problema original (3.23) e para o problema reduzido (4.8), em linha azul pontilhada com losango e em linha vermelha tracejada, respectivamente. As maiores diferenças ocorrem na decisão de turbinamento das usinas 10, 11, 12 e 14, com valores maiores para o problema original e um grande vertimento da usina 16 na decisão do problema reduzido. Essa estratégia de seleção de cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos parece não ser muito eficaz.

### 4.9.3 Seleção a partir de soluções aproximadas

Estamos particularmente interessados nas soluções do problema não antecipativo do planejamento da operação com função de produção não linear. Vimos na Seção 4.6 que o tempo computacional reduz substancialmente quando é considerada a função de produção linear. Assim, motivados pelo Teorema 1.28, para reduzir o número de cenários a serem fixados para resolver o problema não antecipativo com função de produção não linear, consideramos uma solução aproximada resolvendo, inicialmente, o problema com todos os cenários mas com uma linearização da função de produção. Essa estratégia para redução do número de cenários e sua validação é sintetizada a seguir.



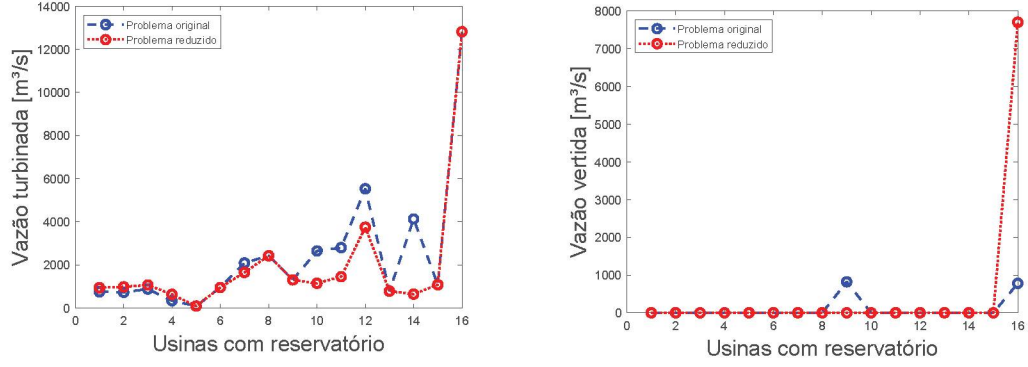


Figura 4.25: Decisões do primeiro mês obtidas pelo problema original (3.23) e reduzido (4.8) com seleção de cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos.

Fonte: A autora

### Técnica de redução de cenários

- Considere  $\alpha$  e  $q$  dados no Algoritmo 4.1. Seja  $\bar{\alpha} = (L - q)/L$ . Determine  $\overline{VaR}_{\bar{\alpha}}$  um minimizador do problema (3.23) com  $\alpha = \bar{\alpha}$  e função de produção hidráulica (3.11) linear.
- Selecione os  $q$  cenários com custos maiores que  $\overline{VaR}_{\bar{\alpha}}$ . Os índices desses cenários formam o conjunto  $\mathcal{Q}$ .

Para validar essa técnica, comparamos as soluções obtidas resolvendo-se o problema reduzido (4.8) e o problema original (3.23), ambos com função de produção não linear.

### Validação da estratégia para o sistema 21.

Para validação desta estratégia consideramos o problema de planejamento da operação do sistema de 21 usinas hidroelétricas com o conjunto de 100 cenários apresentados na Seção 4.3.1. Primeiro, apresentamos um teste com horizonte de 9 meses e  $\alpha = 0.8$ . Como os resultados são promissores, validamos a estratégia na resolução do problema com horizonte de 33 meses para dois valores de  $\alpha$  diferentes: 0.8 e 0.9. Em todos os casos tomamos  $\bar{\alpha} = 0.7$ , de modo que  $q = 30$  cenários.

#### Horizonte de 9 meses.

Considere  $\alpha = 0.8$  e  $\bar{\alpha} = 0.7$ . Resolvemos o problema (3.23) com  $\alpha = \bar{\alpha}$  com a função de produção hidráulica linear, horizonte de 9 meses. Selecionamos o conjunto  $\mathcal{Q}$  com 30 cenários.

Para validação dessa escolha de cenários, resolvemos então o problema (3.23), com  $\alpha = 0.8$ , e o problema (4.8) com  $\alpha' = 1/3$ . Em ambos os problemas, foi considerada a função de produção hidráulica não linear e horizonte de  $T = 9$  meses.

A Tabela 4.11 apresenta os valores de  $CVaR_{\alpha}$ ,  $\overline{VaR}_{\alpha}$ , com  $\alpha$  e  $\alpha'$  e o tempo de execução do algoritmo na resolução de cada um dos dois problemas. O tempo de execução para o problema (4.8) inclui o tempo gasto na resolução do problema com o modelo linear para a seleção dos 30 cenários.

Observamos que o problema reduzido forneceu boas aproximações para o  $CVaR_{\alpha}$  e  $\overline{VaR}_{\alpha}$ , com praticamente 1/3 do tempo computacional gasto para resolver o problema completo. A Figura 4.26 compara a decisão do primeiro mês obtida pelos dois problemas. A figura da esquerda mostra a vazão turbinada e da direita a vazão vertida das usinas com reservatório, em que a linha azul pontilhada com losango representa os resultados do problema original e a linha tracejada em vermelho representa a vazão obtida pela resolução do problema reduzido.



	Problema original	Problema reduzido
	$L = 100, \alpha = 0.8$	$q = 30, \alpha' = 1/3$
$CVaR_\alpha$	$5.1125 \times 10^{11}$	$5.0912 \times 10^{11}$
$VaR_\alpha$	$4.6774 \times 10^{11}$	$4.6254 \times 10^{11}$
Tempo [min]	55	20

Tabela 4.11: Resultados para o problema original e reduzido com 9 meses.

Fonte: A autora

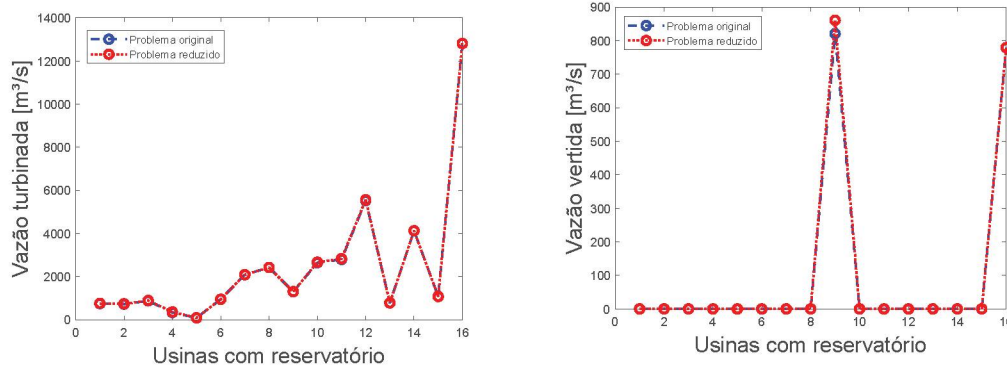


Figura 4.26: Vazões turbinadas e vertidas do primeiro mês com horizonte de 9 meses.

Fonte: A autora

### Horizonte de 33 meses.

Como os resultados anteriores para seleção de cenários mostraram-se promissores, realizamos mais testes, ampliando o horizonte para 33 meses e considerando dois valores de  $\alpha$  distintos: 0.8 e 0.9. Em ambos os casos, tomamos  $\bar{\alpha} = 0.7$ , fazendo assim uma seleção de 30 cenários entre os 100.

A Figura 4.27 sintetiza os resultados da solução do problema (3.23), com  $\bar{\alpha}$ . O valor de  $CVaR_{\bar{\alpha}}$  está representado pelo asterisco azul;  $VaR_{\bar{\alpha}}$  está indicado pelo círculo vermelho; as estrelas pretas indicam os valores dos custos do planejamento da operação correspondentes a cada um dos cenários. Esses custos estão representados de forma ordenada. Foi, então, selecionado o conjunto  $\mathcal{Q}$  com os 30 cenários que fornecem custos acima do  $VaR_{\bar{\alpha}}$ . Esse conjunto está dado a seguir seguindo a ordenação crescente de custos,

$$\mathcal{Q} = \{1, 26, 102, 55, 18, 4, 140, 7, 24, 11, 145, 168, 176, 171, 6, 137, 163, 184, 70, 67, 179, 198, 36, 20, 151, 29, 15, 41, 32, 162\}.$$

Faremos a validação da estratégia para dois valores de  $\alpha$  distintos: 0.8 e 0.9. A Tabela 4.12 mostra os resultados de  $CVaR_\alpha$  e  $VaR_\alpha$  obtidos pela resolução dos problemas original (3.23) e reduzido (4.8) para os dois valores de  $\alpha$  e respectivos valores de  $\alpha'$ : 1/3 e 2/3. Nos problemas reduzidos, o número de cenários acima do  $VaR'_\alpha$  é  $\alpha'q$ , ou sejam, 20 e 10, respectivamente. Observamos que os resultados de  $CVaR_\alpha$  e  $VaR_\alpha$  coincidem para os problemas original e reduzido, para os dois valores de  $\alpha$  considerados.

A Figura 4.28 mostra a decisão do primeiro mês relativa à vazão turbinada para as usinas com reservatório resultante do problema original e do problema reduzido. A figura da esquerda refere-se ao resultado para  $\alpha = 0.8$  e da direita para  $\alpha = 0.9$ . A linha azul pontilhada com losango representa a solução fornecida pelo problema original e a linha tracejada em vermelho do problema reduzido. Para ambos os valores de  $\alpha$ , os resultados do problema reduzido foram bastante satisfatórios.

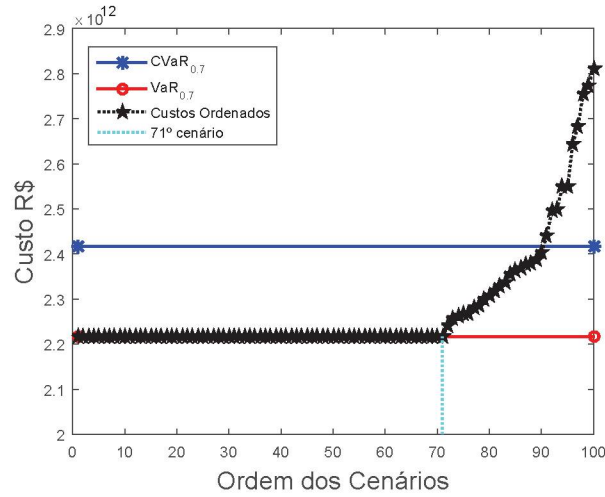


Figura 4.27: Seleção de cenários acima do  $\overline{VaR}_{0.7}$ .

Fonte: A autora

	Problema original	Problema reduzido	Problema original	Problema reduzido
	$\alpha = 0.8$	$\alpha' = 1/3$	$\alpha = 0.9$	$\alpha' = 2/3$
$CVaR_{\alpha}$	$2.4909 \times 10^{12}$	$2.4909 \times 10^{12}$	$2.6199 \times 10^{12}$	$2.6199 \times 10^{12}$
$\overline{VaR}_{\alpha}$	$2.3180 \times 10^{12}$	$2.3180 \times 10^{12}$	$2.4393 \times 10^{12}$	$2.4393 \times 10^{12}$

Tabela 4.12: Valores de  $CVaR_{\alpha}$  e  $\overline{VaR}_{\alpha}$  resultantes do problema original (3.23) e reduzido (4.8) com  $L = 100$  e  $q = 30$  cenários, respectivamente, para valores distintos de  $\alpha$ .

Fonte: A autora

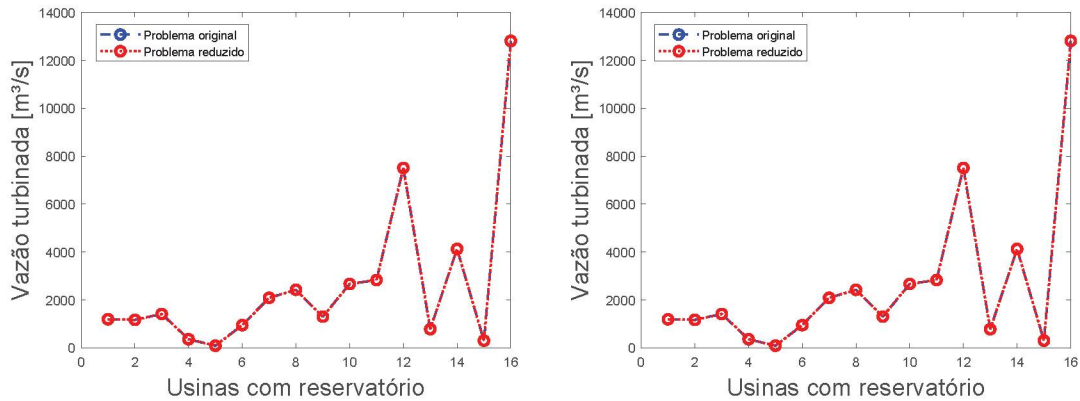


Figura 4.28: Vazões turbinadas, com  $\alpha = 0.8$  (esquerda) e  $\alpha = 0.9$  (direita).

Fonte: A autora

Apresentamos a seguir mais um teste realizado para validar os resultados. Fixamos a decisão do primeiro mês fornecida como solução do problema reduzido e resolvemos os problemas determinísticos para cada um dos 100 cenários com essa decisão fixada. A Figura 4.29 mostra em linha contínua verde os custos ordenados do planejamento para cada um dos 100 cenários fixada a decisão do primeiro mês fornecida pelo problema reduzido (4.8). Além destes custos, são exibidos também os valores de  $CVaR_{\alpha}$  e  $\overline{VaR}_{\alpha}$ . A figura da esquerda corresponde aos resultados para  $\alpha = 0.8$  e da direita para  $\alpha = 0.9$ . Note que os valores de  $\overline{VaR}_{\alpha}$  e  $CVaR_{\alpha}$  são coerentes, já que temos  $\alpha L$  cenários que fornecem custos menores que  $\overline{VaR}_{\alpha}$ , o que pode ser no-

tado no gráfico pela linha tracejada no cenário  $(\alpha L + 1)$ , e o valor de  $CVaR_\alpha$  marca exatamente a média dos  $L(1 - \alpha)$  maiores custos.

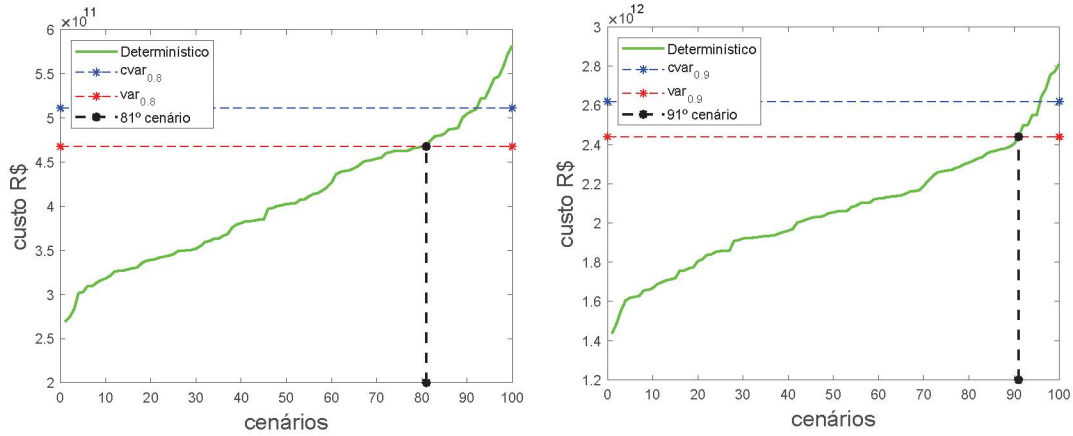


Figura 4.29: Custos fornecidos pelos problemas determinísticos com decisão do primeiro mês fixada, com  $\alpha = 0.8$  (esquerda) e  $\alpha = 0.9$  (direita).

Fonte: A autora

Com estas comparações, validamos que o conjunto  $\mathcal{Q}^c$  é de fato irrelevante para o problema (3.23) no contexto do planejamento hidrotérmico, já que os problemas reduzidos forneceram resultados equivalentes aos problemas originais correspondentes que consideram todos os 100 cenários. Note que esta redução de cenário traz ganho computacional, já que a dimensão do problema depende do número de cenários considerado no problema.

A partir destes testes comprovamos que a seleção dos cenários feita através da solução aproximada usando o modelo linear fornece resultados mais precisos do que a seleção feita através da resolução dos problemas determinísticos. Desta forma, utilizaremos essa estratégia para selecionar cenários relevantes a fim de diminuir a dimensão do problema e o tempo computacional de execução dos algoritmos.

## 4.10 Resultados com o Sistema 141

Nesta seção apresentamos testes numéricos de maior porte resolvendo o problema de planejamento da operação do sistema de 141 usinas hidroelétricas descrito na Seção 4.2.1, com os 100 cenários de aflúências descritos na Seção 4.3.2, horizonte de planejamento de 33 meses a partir do mês de abril, permitindo esvaziar os reservatórios no último período e função de produção (3.11) não linear.

### 4.10.1 Redução de cenários

Nesta seção seguimos a estratégia, proposta na Seção 4.9.3, para reduzir o número de cenários a partir de soluções aproximadas, considerando  $\alpha = 0.9$  e  $\bar{\alpha} = 0.7$ . Como o conjunto de cenários de aflúências contém 100 cenários e  $\bar{\alpha} = 0.7$ , pela definição do  $VaR_{0.7}$  teremos 30 cenários fornecendo custo do planejamento da operação maiores que  $\overline{VaR}_{0.7}$  obtido, ou seja,  $\mathcal{Q}$  será composto por 30 cenários:

$\mathcal{Q} = \{109 \ 1 \ 77 \ 46 \ 58 \ 112 \ 94 \ 99 \ 129 \ 28 \ 106 \ 163 \ 76 \ 91 \ 7 \ 152 \ 160 \ 62 \ 3 \ 41 \ 103 \ 187 \ 47 \ 95 \ 190 \ 128 \ 154 \ 125 \ 108 \ 40\}$ .

Este será o conjunto de índices de cenários considerado nas próximas seções.



### 4.10.2 Simulação

Nesta seção discutimos resultados para a obtenção de uma política não antecipativa, conforme Seção 3.3.2, para a resolução do problema de planejamento da operação do sistema considerando aversão ao risco no custo total (3.23) e neutra ao risco (3.20). Esta política, para cada um dos casos, foi obtida seguindo o Algoritmo 3.1. Para discutirmos e compararmos os resultados consideramos duas situações. Na primeira, foram considerados os dados como apresentados no início da Seção 4.10 e simulação com horizonte fixo (3.22) para 33 meses, adotando-se três cenários históricos para simulação, com início em abril dos anos de 1952, 1957 e 1993. Como visto na Seção 4.3.2 e exibida na Figura 4.9 o cenário iniciado em 1952 foi um cenário de afluições baixas, 1957 um cenário de afluições médias e 1993 um cenário de afluições altas. Na segunda, fixamos o cenário iniciado em 1957 e comparamos os resultados usando a função de produção não linear (3.11) e sua linearização nos problemas não antecipativos. Em todos os casos, a simulação, que resolve um problema determinístico de curto prazo, considera a função de produção não linear.

#### Análise dos diferentes cenários de simulação

Foram considerados os três cenários de simulação e em cada caso foi resolvido o problema neutro e avesso ao risco, fornecendo assim seis situações distintas. A Figura 4.30 mostra os custos para cada mês da simulação (esquerda) e custos acumulados (direita) para as seis situações. Em linha contínua, vermelha com círculos, azul com estrelas e verde com losangos, estão representados os custos obtidos pela resolução do problema sem considerar risco (3.20) adotando para simulação os cenários históricos iniciados em 1952, 1957 e 1993, respectivamente. Já os custos obtidos pela simulação na resolução do problema considerando aversão ao risco no custo total (3.23) para os cenários de 1952, 1957 e 1993, estão representados em linha pontilhada, com círculos rosas, estrelas em ciano e losangos em amarelo, respectivamente.

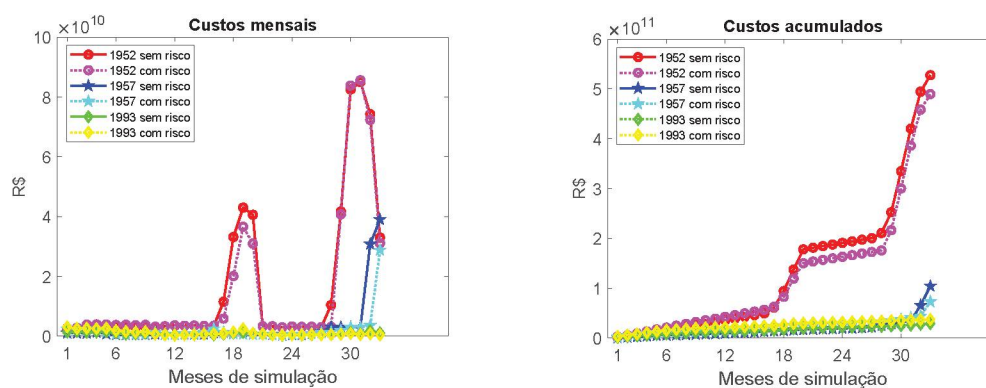


Figura 4.30: Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita).

Fonte: A autora

Como o cenário iniciado em 1952 corresponde a um período de seca, notamos que os custos mensais são maiores que os associados a 1957, que por sua vez são maiores que os associados a 1993, já que 1957 foi um cenário mediano e 1993 foi considerado um cenário molhado. Para analisarmos o efeito da inclusão da aversão ao risco, a Figura 4.31 exibe cada um dos custos acumulados separadamente em relação aos cenários considerados.

Observa-se que inclusão da aversão ao risco no problema do planejamento é vantajoso em casos críticos, já que no problema com aversão ao risco (3.23) otimiza-se os piores casos. Pela Figura 4.31 notamos que o custo obtido para este caso é menor nos cenários mais secos. Isto ocorre pois o planejamento é feito supondo o acontecimento de casos mais críticos, ou seja,



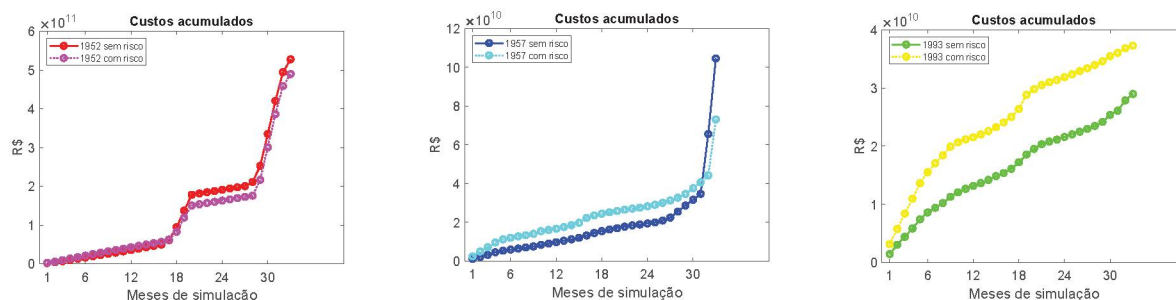


Figura 4.31: Custos acumulados para os anos de 1952, 1957 e 1993.

Fonte: A autora

com afluições mais baixas. Note que para o cenário iniciado em 1993, a inclusão ao risco não traz vantagens, já que as afluições foram altas.

A Figura 4.32 mostra gráficos de barras das potências hídrica (azul), termoeletrica (verde) e déficit (vermelho) do sistema para o ano de 1952. As barras da esquerda correspondem à decisão dessas potências obtida pela resolução do problema do planejamento da operação do sistema (3.20) neutro ao risco, enquanto as barras da direita correspondem à resolução do problema com aversão ao risco (3.23). Notamos que, neste caso, a inclusão de aversão ao risco reduz os déficits obtidos no planejamento. Além disso, as gerações térmicas do primeiro até décimo segundo mês são sempre maiores para o planejamento com risco, já que neste caso planeja-se para casos críticos. Com estas gerações maiores no início consegue-se reduzir o déficit no futuro.

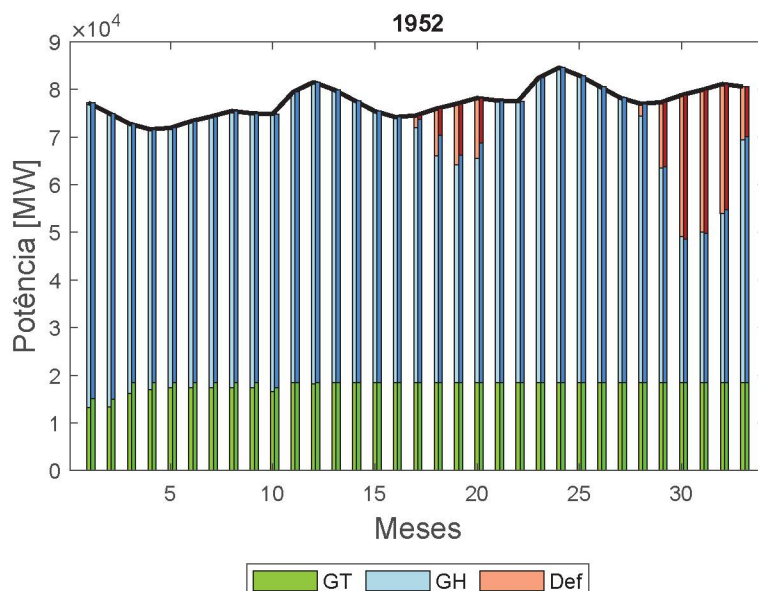


Figura 4.32: Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1952. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco

Fonte: A autora

A Figura 4.33 mostra gráficos de barras das potências hídrica (azul), termoeletrica (verde) e déficit (vermelho) do sistema para o cenário iniciado em 1957. As barras da esquerda correspondem à decisão dessas potências obtida pela resolução do problema do planejamento da operação do sistema (3.20) neutro ao risco, enquanto as barras da direita correspondem à

resolução do problema com aversão ao risco (3.23). Notamos que a inclusão da aversão ao risco evita ou reduz os déficits obtidos no planejamento, isto vem do fato de que no início do planejamento o sistema gera mais energia termoeletrica, como pode ser observado do primeiro até o décimo sétimo mês.

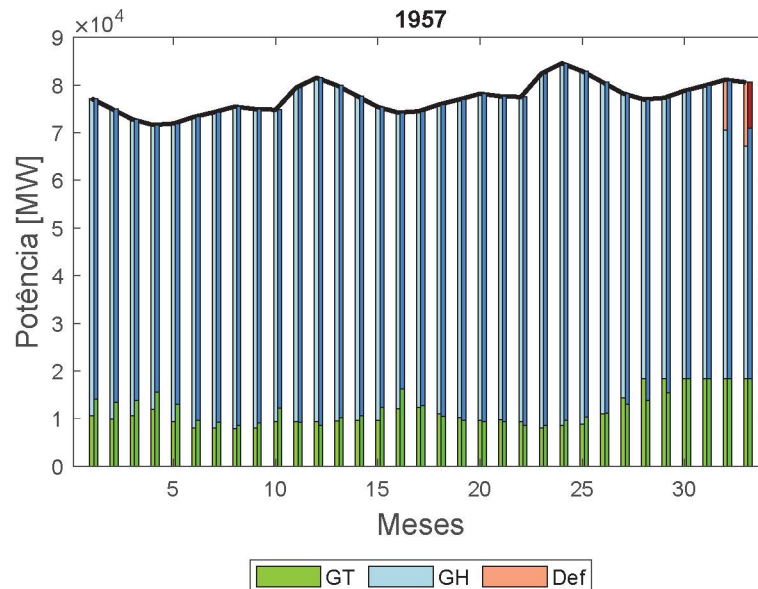


Figura 4.33: Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco

Fonte: A autora

A Figura 4.34 mostra gráficos de barras das potências hídrica (azul), termoeletrica (verde) e déficit (vermelho) do sistema para o cenário de 1993. As barras da esquerda correspondem à decisão dessas potências obtida pela resolução do problema do planejamento da operação do sistema (3.20) neutro ao risco, enquanto as barras da direita correspondem à resolução do problema com aversão ao risco (3.23). Notamos que para este caso a inclusão da aversão ao risco não é vantajosa. No início do planejamento é gerada mais energia térmica para se evitar déficit diante de uma seca, mas como o cenário iniciado em 1993 foi molhado, esta geração inicial foi desnecessária. Isto fez com que o custo do planejamento neste caso seja mais elevado do que quando não se considera o risco. Aqui o planejamento foi feito para uma situação ruim que não ocorreu, isto eleva os custos.

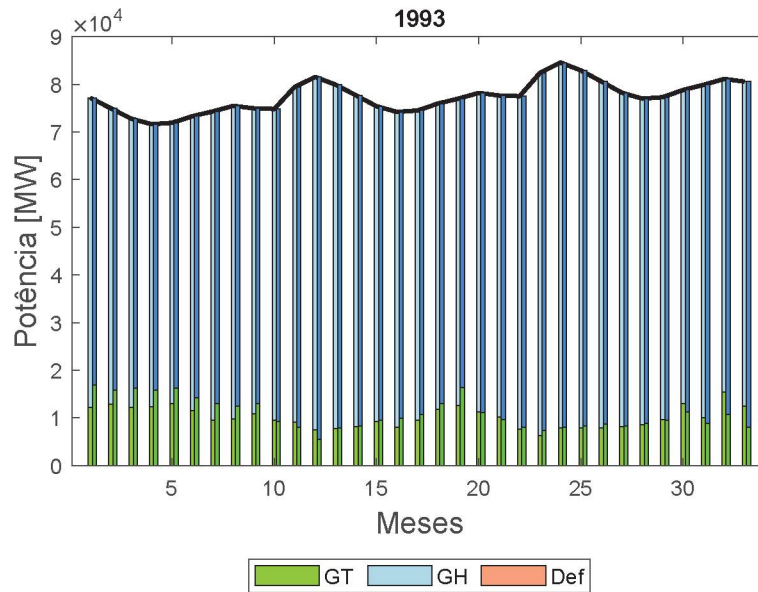


Figura 4.34: Valores mensais da potência, com simulação usando o cenário histórico de 1957. As barras da esquerda correspondem às decisões neutras ao risco e da direita aversas ao risco  
Fonte: A autora

O problema do planejamento da operação é resolvido com o objetivo de obter o menor custo operativo. O multiplicador de Lagrange associado à restrição de demanda de um subsistema corresponde ao custo de cada *MW* extra na demanda. As Figuras 4.35, 4.36 e 4.37 mostram o custo de cada *MW* extra na demanda por subsistema obtido pela resolução de cada um dos problemas considerando como cenário de simulação 1952, 1957 e 1993, respectivamente. As figuras da esquerda correspondem aos custos neutros ao risco, enquanto as da direita estão associadas aos custos com aversão ao risco.

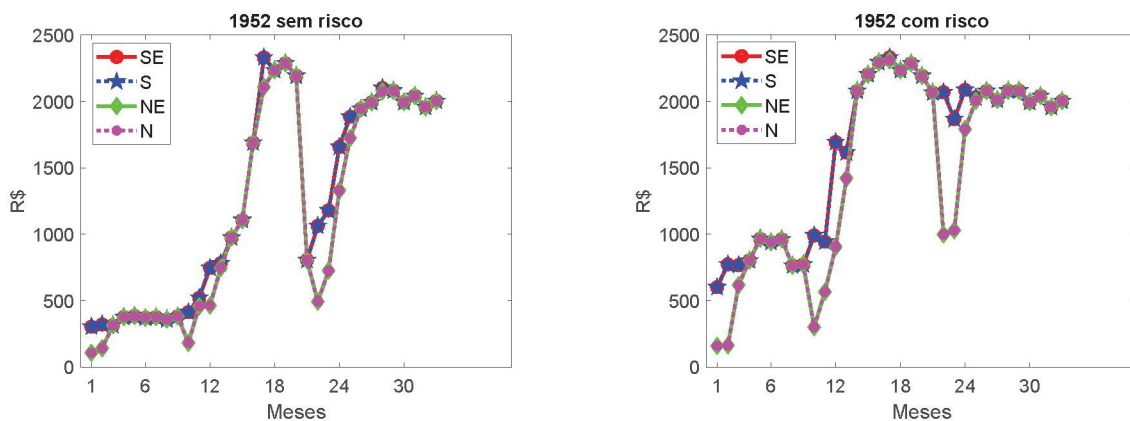


Figura 4.35: Preços considerando o cenário histórico de 1952 para simulação.  
Fonte: A autora

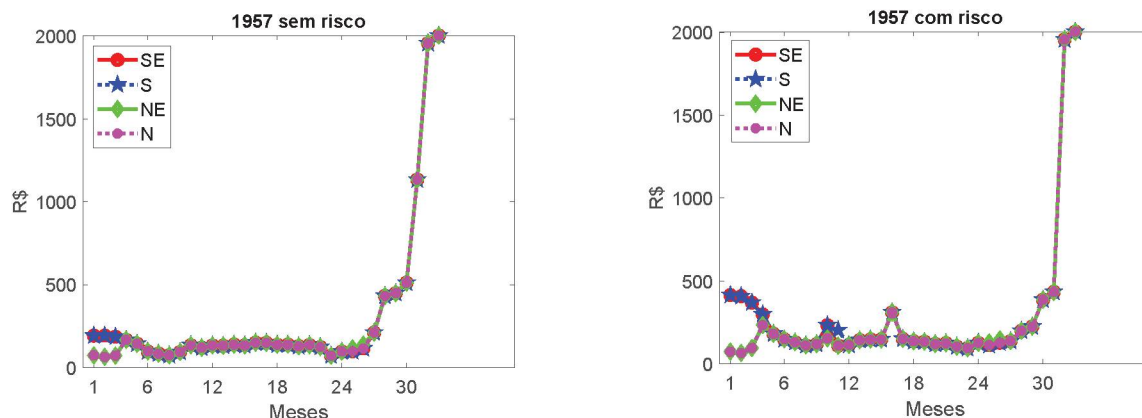


Figura 4.36: Preços considerando o cenário histórico de 1957 para simulação.  
Fonte: A autora

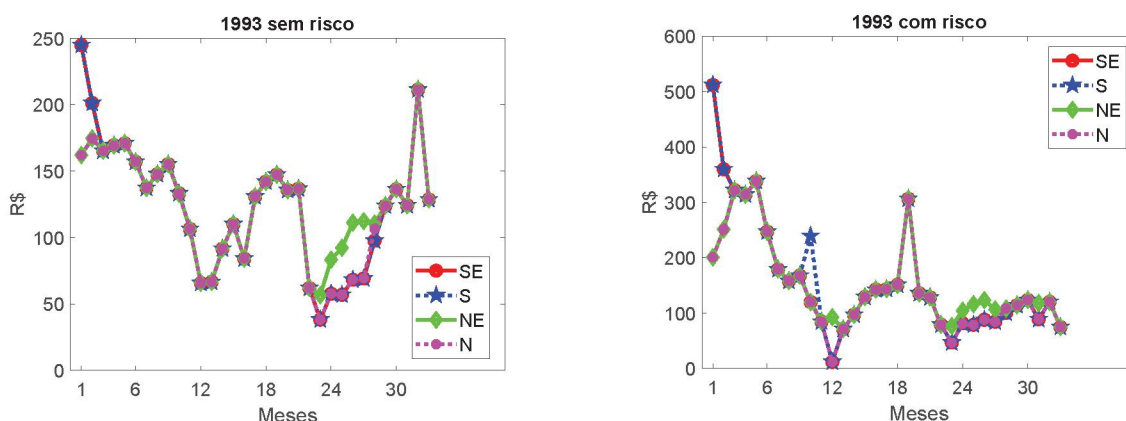


Figura 4.37: Preços considerando o cenário histórico de 1993 para simulação.  
Fonte: A autora

### Análise da simulação com linearização da função de produção

Aqui fixamos o cenário de 1957 e comparamos os resultados obtidos pela simulação na resolução do problema do planejamento considerando aversão ao risco no custo total (3.23) com função de produção (3.11) linear e não linear. Em ambos os casos o problema de curto prazo (3.15), considerado na simulação, é não linear.

A Figura 4.38 mostra os custos para cada mês da simulação (esquerda) e custos acumulados (direita) para as duas situações. Em linha contínua, vermelha com círculos e azul com estrelas, estão representados os custos obtidos pela resolução do problema (3.23) com função de produção (3.11) linear e não linear, respectivamente. A linearização da função de produção fornece uma boa aproximação para os custos obtidos pela resolução do problema com a função de produção original com tempo computacional menor. No entanto, ao se resolver o problema com função de produção não linear, os resultados são melhores.

A Figura 4.39 mostra gráficos de barras das potências hídrica (azul), termoeletrica (verde) e déficit (vermelho) do sistema em cada mês obtidas da resolução do problema do planejamento da operação do sistema com aversão ao risco (3.23). As barras da esquerda correspondem às potências com o problema com função de produção não linear, enquanto as da direita referem-se às potências considerando a linearização da função de produção. Ao utilizar



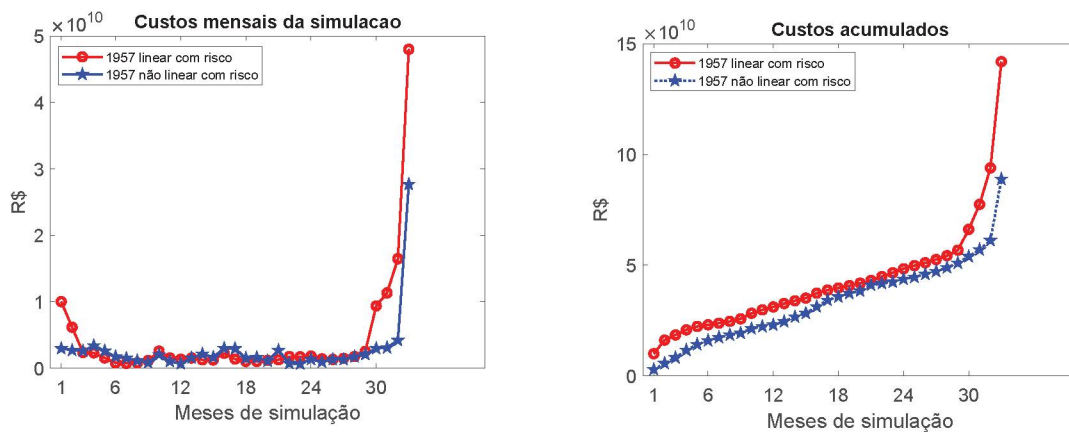


Figura 4.38: Custos mensais (esquerda) e custos acumulados (direita).

Fonte: A autora

o modelo linear a decisão obtida fornece déficit em alguns meses, o que pela decisão tomada considerando o modelo mais real não ocorre.

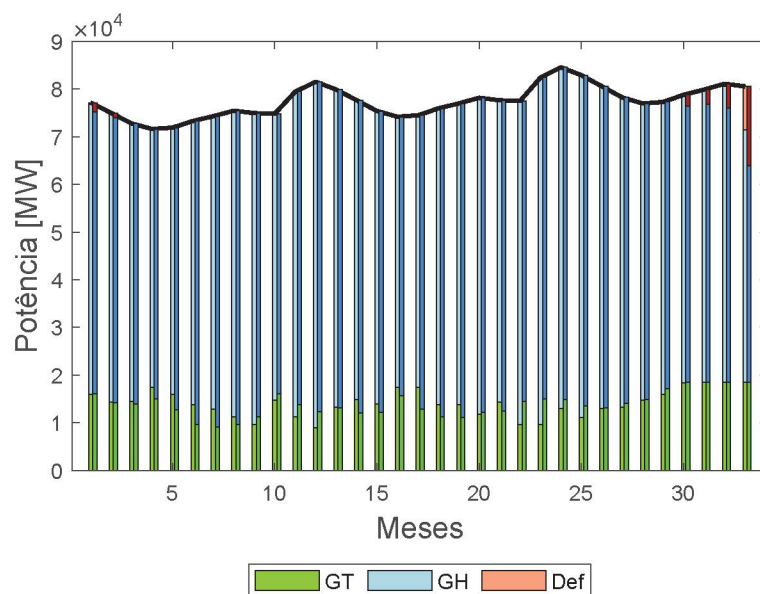


Figura 4.39: Valores mensais da potência. As barras da esquerda correspondem às decisões obtidas pela função de produção não linear e da direita linear.

Fonte: A autora

A Figura 4.40 mostra do lado esquerdo a energia gerada pela simulação considerando função de produção linear que está representada no gráfico pela linha contínua vermelha com círculos e a gerada pela simulação considerando função de produção não linear, a qual está representada pela linha pontilhada azul com estrelas. Do lado direito temos a energia armazenada total, com as mesmas representações da energia gerada. A energia armazenada total é a soma das energias geradas de cada uma das usinas quando se esvazia o reservatório, ou seja, quando utiliza-se todo o volume útil deste reservatório para gerar energia. Este cálculo é feito a partir de um modelo linear de um reservatório.

A partir dessas análises concluímos que para obter decisões deve-se utilizar o modelo não linear para a função de produção. O modelo linear apresentou custos maiores e déficits,

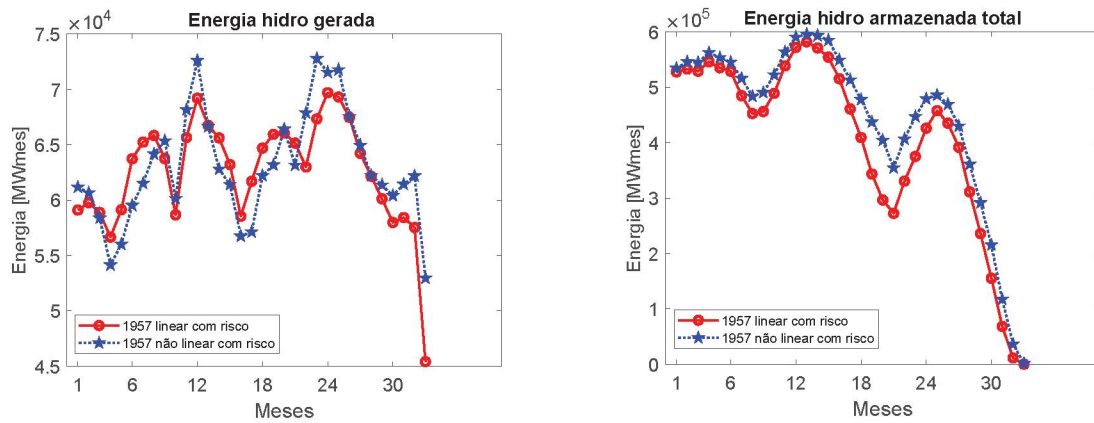


Figura 4.40: Energia gerada (esquerda) e energia armazenada (direita).

Fonte: A autora

mostrando assim que com o modelo linear o tomador de decisão pode considerar uma solução que exija custos desnecessários para o planejamento.

## Conclusão

Nesta tese propusemos metodologias relacionadas à resolução do problema de planejamento de médio prazo da operação hidrotérmica do sistema brasileiro através da análise de cenários, incluindo aversão ao risco. Essas metodologias foram aplicadas em dois sistemas teste com dados reais disponibilizados pelo ONS.

A principal abordagem encontrada na literatura para resolver problemas de planejamento de médio prazo da operação hidrotérmica considera versões linearizadas do problema que são resolvidas por PDDE - Programação Dinâmica Dual Estocástica, um método proposto por Pereira e Pinto em [27]. Em nosso trabalho usamos um modelo de programação não linear do problema e ao invés de PDDE, usamos uma análise de cenários não antecipativa, considerando cenários de afluições sintéticos fornecidos pelos autores de [9] baseados em dados históricos de afluições disponíveis ao longo de 85 anos. Diferente do PDDE, a modelagem através de análise de cenários leva em consideração a estocasticidade e a não linearidade do problema.

O modelo do problema de planejamento hidrotérmico nacional considerado foi proposto em [20, 28] e minimiza os custos de geração térmica, de déficit energético do sistema e do custo de intercâmbio entre os subsistemas, considerando restrições operativas das usinas, balanço hídrico, atendimento à demanda, evaporação e defluência mínima total nos reservatórios. As não linearidades do problema são oriundas do cálculo da função de produção das usinas com reservatório que, por sua vez, é considerada nas restrições de atendimento da demanda. A estocasticidade, por outro lado, é devida à incerteza relativa às afluições que influenciam o balanço hídrico.

Dado um conjunto de cenários de afluições para o período de planejamento, que coincidam no primeiro mês, são obtidas decisões não antecipativas, ou sejam, decisões que coincidam no primeiro mês independentemente do cenário e que minimizam o custo total esperado. Com um cenário de simulação fixado, uma política não antecipativa é determinada resolvendo sequencialmente o problema do planejamento hidrotérmico não antecipativo seguido de um problema de curto prazo. Em cada estágio do processo sequencial, a partir do volume inicial dos reservatórios, é resolvido um problema não antecipativo e obtida uma decisão para o primeiro mês. A partir dessa decisão, são fixadas as vazões turbinadas e vertidas para as usinas com reservatório, e resolvido um problema de curto prazo determinístico com o cenário de simulação, e com o maior detalhamento possível do modelo. Assim, são obtidas as demais decisões para este estágio. Esse processo é repetido, tomando-se como volume inicial para o próximo estágio aquele dado pelo balanço hídrico levando-se em consideração o volume anterior e as decisões do estágio atual. A sequência de decisões obtidas pelos problemas de curto prazo define a política para aquele cenário de simulação.

Os problemas não antecipativos podem ser resolvidos pelo algoritmo Progressive Hedging [38]. Este algoritmo decompõe o problema em vários subproblemas possibilitando paralelização em sua implementação. Essa paralelização foi feita utilizando o pacote do Matlab *Parallel Computing Toolbox* através do comando `parfor`.

A aversão ao risco é incluída no problema através de  $CVaR_\alpha$  conforme Rockafellar



e Uryasev em [37]. Uma das contribuições da tese foi particularizar a definição de  $CVaR_\alpha$  para o caso de variáveis discretas. Outra contribuição está relacionada à inclusão de aversão ao risco ao problema de planejamento hidrotérmico. Esta inclusão já havia sido considerada em [6, 19], mas no contexto de PDDE, o qual resolve modelos lineares sem levar em conta a altura de queda real das usinas. Nesta tese foram discutidas três maneiras de introduzir aversão ao risco ao problema através de análise de cenários. A primeira, motivada por Rockafellar e Uryasev em [37], considera  $CVaR_\alpha$  no custo total, que envolve o custo da energia gerada pelas térmicas do sistema, o custo dos déficits de energia e o custo dos intercâmbios de energia entre os subsistemas. Déficit é um evento que se deseja evitar, assim, seguindo as ideias de Costa Junior [6], a segunda maneira considera a aversão ao risco apenas na parcela do custo do déficit. Como alternativa a essas abordagens, a terceira maneira tratada por Shapiro [40] sugere uma medida coerente de risco dada pela combinação convexa entre a esperança  $E[Z]$  e  $CVaR_\alpha(Z)$  a ser considerada na função objetivo. Os resultados dos testes discutidos na Seção 4.7, para o caso do planejamento, mostraram que, no nosso problema, a combinação convexa é equivalente à neutra ao risco, enquanto a alternativa de inclusão de risco no déficit é equivalente à aversão ao risco na função custo total. Desta forma, as discussões apresentadas em relação à inclusão de risco no problema do planejamento foram focadas na primeira estratégia, ou seja, que aplica  $CVaR$  no custo total esperado. De acordo com os testes apresentados na Seção 4.10.2 a inclusão de risco no problema do planejamento é vantajoso em casos críticos, já que neste caso otimizam-se os piores casos. Dado um nível de confiança  $\alpha$  pré-estabelecido,  $VaR_\alpha$  e  $CVaR_\alpha$  trazem informações importantes em relação ao custo da operação. Temos um limitante inferior para os custos, que é o  $VaR_\alpha$  e também uma estimativa média para os custos mais altos da operação, que é o  $CVaR_\alpha$  que podem auxiliar o tomador de decisão.

Ao resolver o problema do planejamento com aversão ao risco considerando um conjunto de  $L$  cenários e um nível de confiança  $\alpha$ , obtém-se uma decisão que minimiza o custo dos  $L(1 - \alpha)$  piores cenários, sem levar em consideração os custos dos demais  $\alpha L$  cenários exigindo apenas a viabilidade em relação a eles. Assim, esta decisão não fornece bons resultados para os cenários com custos abaixo do  $VaR_\alpha$ . Desta forma, se o operador tiver interesse no custo do planejamento para qualquer um dos  $L$  cenários, sugerimos que, com a decisão obtida da minimização dos  $L(1 - \alpha)$  piores cenários resolva-se o problema determinístico para os outros cenários com a decisão do primeiro mês fixada, conforme Seção 4.8. Assim, é obtido o custo mais adequado para o planejamento considerando os melhores cenários para um problema não antecipativo.

Além da contribuição sobre a inclusão de aversão ao risco ao problema de planejamento hidrotérmico, a tese traz uma análise sobre a seleção dos cenários envolvidos na resolução do problema com aversão ao risco. Essa seleção é feita a partir de um conjunto de  $L$  cenários, em que o objetivo é encontrar um subconjunto de cenários irrelevantes de modo que uma decisão obtida considerando o conjunto reduzido (complementar ao conjunto de cenários irrelevantes) seja tão confiável quanto uma decisão tomada com aversão ao risco a partir do conjunto original de cenários. Foram apresentadas duas técnicas para a seleção desses cenários. A primeira técnica consiste em selecionar os cenários a partir das soluções dos problemas determinísticos e a segunda, consiste em selecionar cenários a partir de uma solução aproximada, a partir de uma linearização da função de produção hidráulica (3.11). Utilizando o sistema teste reduzido de 21 usinas, a segunda técnica que usa soluções aproximadas mostrou-se mais eficiente. Esta técnica foi aplicada para reduzir o número de cenários na resolução do problema do planejamento da operação do sistema de 141 usinas com aversão ao risco. Com esta redução discutimos, na Seção 4.9, resultados para a obtenção de uma política não antecipativa, conforme Seção 3.3.2, para a resolução do problema de planejamento da operação do sistema considerando aversão ao risco no custo total (3.23) e neutra ao risco (3.20). A redução permitiu



obter bons resultados com um tempo consideravelmente menor em comparação à resolução do problema com o conjunto original de cenários. Com isso, pudemos obter uma política a partir da resolução do problema (3.23) que visa a redução de custo de operação e controla o risco a que esta operação está sujeita.

Concluimos essa tese na expectativa de termos contribuído na discussão de metodologias relativas à resolução do problema do planejamento da operação do SIN.

# Referências

- [1] S. Arpón, T. Homem-De-Mello, and B. Pagnoncelli. Scenario reduction for risk-averse stochastic programs with Conditional Value-at-Risk. *Mathematical Programming*, 170(1):327–356, 2018.
- [2] F. Bastin and S. Zehtabian. Penalty parameter update strategies in progressive hedging algorithm. Technical Report 12, CIRRELT, Canada, March 2016.
- [3] CEPEL. *NEWAVE - Modelo de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Interligados de Longo e Médio Prazo*. Disponível em <<http://www.cepel.br/pt-br/produtos/newave-modelo-de-planejamento-da-operacao-de-sistemas-hidrotermicos-interligados-de-longo-e-medio-prazo.htm>>, Acesso em 14 de agosto de 2020.
- [4] CEPEL. *Centro de pesquisa de energia elétrica*. Modelo DESSEM- versão 8.2a, Relatório Técnico, 2003.
- [5] M.A. Cicogna. Sistema de suporte à decisão para o planejamento e a programação da operação de sistemas de energia elétrica. *Tese (Doutorado)-Universidade Estadual de Campinas*, 2004.
- [6] L.C. Costa Junior. Representação de restrição de aversão ao risco de CVAR em programação dinâmica dual estocástica com aplicação ao planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. *Tese (Doutorado)-Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2013.
- [7] Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE). *Deck de preços do modelo NEWAVE, ref. 05/2017, 2017*. Disponível em <<https://www.ccee.org.br/ccee/documentos/NW201705>>, Acesso em 07 de junho de 2017.
- [8] W. de O. Bussab and P. A. Morettin. *Estatística Básica*. Editora Saraiva, 2010.
- [9] D.H. Detzel, M.R. Bessa, M.R.M. Mine, and M. Blot. Cenários sintéticos de vazões para grandes sistemas hídricos através de modelos contemporâneos e amostragem. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 19:17–28, 2014.
- [10] Operador Nacional do Sistema Elétrico. *sítio do ONS*. Disponível em <<http://www.ons.org.br>>, Acesso em 25 de maio de 2019.
- [11] R. Fletcher and S. Leyffer. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming - Ser. A*, 91(2):239–269, 2002.
- [12] R.E.C. Gonçalves, E.C. Finardi, and E.L. Silva. *Exploring the progressive hedging characteristic in the solution of the medium-term operation planning problem*. Power Systems Computation Conference, Stockholm, Sweden, 2011.

- [13] R. E. C. Gonçalves, E. C. Finardi, E. L. Silva, and M.L.L. Santos. Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-term operation planning problem. *Applied Mathematics and Computation*, 30(2):289–313, 2011.
- [14] C.C. Gonzaga and L.C. Matioli. A new family of penalties for augmented lagrangian methods. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15:925–944, 2008.
- [15] B.R. James. *Probabilidade: um curso nível intermediário*. Projeto Euclides, 2008.
- [16] E. W. Karas, C. C. Gonzaga, and M. Vanti. A globally convergent filter method for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 14(3):646–669, 2004.
- [17] M. Kleina. *Sistema hidrotérmico brasileiro: uma solução matemática*. Appris, 2016.
- [18] L. Klimes and P. Popela. An implementation of Progressive Hedging algorithm for engineering problems. In *Proceedings of 16th International Conference on Soft Computing MENDEL*, pages 459–464, 2010.
- [19] P. Larroyd, V. de Matos, and E. Finardi. Assessment of risk-averse policies for the long-term hydrothermal scheduling problem. *Energy Systems*, 8, 02 2016.
- [20] D.C. Marcilio. Otimização do despacho hidrotérmico utilizando o método de lagrangeano aumentado com gradiente espectral projetado. *Tese (Doutorado)-Universidade Federal do Paraná*, 2014.
- [21] J. M. Martínez. Box-quacan and the implementation of augmented lagrangian algoritmos for minimization with inequality constraints. *Computational & Applied Mathematics*, 19:31–56, 2000.
- [22] MME. *Boletim de monitoramento do sistema elétrico-novembro-2018*. Disponível em <<http://www.mme.gov.br/web/guest/secretarias/energia-eletrica/publicacoes/boletim-de-monitoramento-do-sistema-eletrico/boletins-2018>>, Acesso em 22 de fevereiro de 2019.
- [23] J.M. Mulvey and H. Vladimirov. Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. *Annals of Operations Research*, 31(1):399–424, 1991.
- [24] L.A. Nacif. Modelo de otimização Estocástico, Não Linear a Usinas Individualizadas e com Elasticidade da Demanda Para Otimização da Operação do Sistema Interligado Nacional. *Tese (Doutorado)-Universidade Federal do Paraná*, 2020.
- [25] A. Nemirovski and A. Shapiro. Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Journal on Optimization*, 17:969–996, 2007.
- [26] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, 2006.
- [27] M.V.F. Pereira and L.M.V.G. Pinto. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical Programming*, 52:359–375, 1991.
- [28] G. A. Perigaro, E.W Karas, L.C. Matioli, D.C. Marcilio, A.P. Oening, and C.C. Gonzaga. Optimal scenarios for the operation of hydrothermal power systems using a Filter-SQP algorithm. *Proceedings of XII Chilean Conference on Operations Research*, Viña del Mar, Chile. 2017.

- [29] G. A. Perigo, A. A. Ribeiro, and E. W. Karas. Global convergence of a general filter algorithm based on an efficiency condition of the step. *Applied Mathematics and Computation*, 219:9581–9597, 2013.
- [30] G.A. Perigo. Algoritmo de filtro globalmente convergentes: Teoria, implementação e aplicação. *Tese (Doutorado)-Universidade Federal do Paraná*, 2011.
- [31] G.A. Perigo, E. W. Karas, C.C. Gonzaga, D.C. Marcilio, A.P. Oening, L.C. Matioli, D.H.M. Detzel, K. Geus, and M.R. Bessa. Optimal non-anticipative scenarios for nonlinear hydro-thermal power systems. *Applied Mathematics and Computation*, 387:124820, 2020.
- [32] H. Rahimian, G. Bayraksan, and T. Homem de Mello. Identifying effective scenarios in distributionally robust stochastic programs with total variation distance. *Mathematical Programming*, 173:393–430, 2019.
- [33] F.S. Reis, P.M.S. Carvalho, and L. Ferreira. Reinforcement scheduling convergence in power systems transmission planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2):1151–1157, 2005.
- [34] A. A. Ribeiro and E. W. Karas. *Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, 2013.
- [35] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7):1443–1471, 2002.
- [36] R.T. Rockafellar. Solving stochastic programming problems with risk measures by progressive hedging. *Springer*, 2007.
- [37] R.T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value at risk. *Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
- [38] R.T. Rockafellar and J.B. Wets. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of operations research*, 16(1):119–147, 1991.
- [39] A. Ruszczyński and A. Shapiro. *Stochastic Programming, Handbook in Operations Research and Management Science*. 01 2003.
- [40] A. Shapiro. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. *EUR J OPER RES*, 209:63–72, 2011.
- [41] A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. MOS-SIAM Series on Optimization. SIAM, second edition, 2014.
- [42] D. Silva Filho. Dimensionamento de usinas hidrelétricas através de técnicas de otimização evolutiva. *Tese (Doutorado)-Universidade de São Paulo*, 2003.
- [43] R. J-B. Wets. The aggregation principle in scenario analysis and stochastic optimization. In S. W. Wallace, editor, *Algorithms and Model Formulations in Mathematical Programming*, volume 51 of *NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences*, pages 91–113. Springer, 1989.



# Apêndice A

## Usinas Hidroelétricas

A Tabela A.1 exibe todas as usinas do sistema 141 relacionando código utilizado pelo ONS, nome da usina, potência em  $MW$ , volume mínimo  $V_{min}$ , volume máximo  $V_{max}$  e volume inicial  $V_0$  em  $hm^3$ , vazão máxima turbinada de cada usina  $QC_{max}$  em  $m^3/s$  e por fim, traz a informação de qual usina é considerada a fio d'água. Consideramos nula a vazão mínima turbinada de cada usina. As cores nos códigos são para identificar o subsistema que esta usina pertence. Lembrando que a cor vermelha representa o subsistema Sudeste/Centro-Oeste, a cor azul o subsistema Sul, a cor amarela o subsistema Nordeste, a cor verde o subsistema Norte e, por fim, a cor preta indicando o subsistema Itaipu. As usinas com nomes em negrito compõem o sistema 21.

Código ONS	Usina	Potência $[MW]$	$V_{min}$ $[hm^3]$	$V_{max}$ $[hm^3]$	$V_0$ $[hm^3]$	$QC_{max}$ $[m^3/s]$	Fio d'água
1	Camargos	46	120	792	792	220	
2	Itutinga	52	11	11	11	236	x
4	Funil - Grande	180	304	304	304	585	x
6	<b>Furnas</b>	1312	5733	22950	22950	1692	
7	Mascarenhas de Moraes	478	1540	4040	4040	1328	
8	L.C. Barreto	1104	1423	1423	1423	2028	x
9	Jaguara	424	450	450	450	1076	x
10	Igarapava	210	480	480	480	1480	x
11	Volta Grande	380	2244	2244	2244	1584	x
12	Porto Colômbia	328	1524	1524	1524	1988	x
14	Caconde	80	51	555	555	94	
15	E. da Cunha	109	14	14	14	148	x
16	A. S. Oliveira	32	25	25	25	178	x
17	<b>Marimbondo</b>	1488	890	6150	6150	2944	
18	<b>Água Vermelha</b>	1396	5856	11025	11025	2958	
20	Batalha	52	430	1782	1782	154	
21	Serra do Facão	213	1752	5199	5199	324	
24	<b>Emborcação</b>	1192	4669	17725	17725	1048	
25	Nova Ponte	510	2412	12792	12792	576	
26	Miranda	408	974	1120	1120	675	
27	Capim Branco 1	240	228	241	241	495	
28	Capim Branco 2	210	878	879	879	537	x
29	Corumbá IV	127	2937	3708	3708	208	
30	Corumbá I	375	470	1500	1500	570	

31	<b>Itumbiara</b>	2082	4573	17027	17027	2940	
32	C. Dourada	658	460	460	460	2513	x
33	<b>São Simão</b>	1710	7000	12540	12540	2670	
37	Barra Bonita	140	569	3135	3135	756	
38	Bariri	144	544	544	544	771	x
39	Ibitinga	131	985	985	985	702	x
40	Promissão	264	5280	7408	7408	1293	
42	N. Avanhandava	347	2720	2720	2720	1431	x
44	34 - <b>Ilha Solteira</b>	3444	25467	34432	34432	11604	
	43- Três Irmãos	807,5					
45	Jupia	1551	3354	3354	3354	8344	x
46	<b>Porto Primavera</b>	1540	14400	14400	14400	8904	x
47	Jurumirim	101	3843	7008	7008	364	
48	Piraju	80	84	84	84	362	x
49	Chavantes	414	5754	8795	8795	626	
50	L. N. Garcez	74	45	45	45	580	x
51	Canoas III	72	151	151	151	561	x
52	Canoas I	82	212	212	212	567	x
57	Mauá	352	1473	2137	2137	339	
61	Capivara	618	4816	10540	10540	1486	
62	Taquaruçu	525	677	677	677	2550	x
63	Rosana	354	1918	1918	1918	2468	x
66	<b>Itaipu</b>	14000	27695	29404	29404	13260	x
71	Sta Clara PR	120	169	431	431	162	
72	Fundão	120	35	35	35	152	x
73	Jordão	0	85	110	110	0	
74	<b>Foz do Areia</b>	1676	1974	5779	5779	1376	
76	<b>Segredo</b>	1260	2562	2950	2950	1268	
77	<b>S. Santiago</b>	1420	2662	6775	6775	1576	
78	<b>Salto Osório</b>	1078	1124	1124	1124	1784	x
82	<b>Gov. José Richa</b>	1240	3573	3573	3573	2100	
86	Barra Grande	690	2712	4904	4904	516	
89	Garibaldi	189	232	296	296	501	
90	Campos Novos	880	1320	1477	1477	558	
91	<b>Machadinho</b>	1140	2283	3340	3340	1311	
92	<b>Itá</b>	1450	5100	5100	5100	1590	x
93	<b>Passo Fundo</b>	226	185	1589	1589	102	
94	Monjolinho	74	150	150	150	134	x
95	Quebra-Queixo	120	111	137	137	114	
97	Castro Alves	130	87	92	92	159	x
98	Monte Claro	130	10	11	11	372	x
99	14 de Julho	100	49	55	55	340	x
101	São José	51	186	186	186	288	x
102	Passo S João	77	102	102	102	326	x
103	Foz do Chapecó	855	1427	1502	1502	1888	x
110	Ernestina	0	21	259	259	0	
111	Passo Real	158	289	3646	3646	466	

112	Jacui	180	29	29	29	234	x
113	Itaúba	500	620	620	620	620	x
114	D. Francisca	125	330	330	330	376	x
115	C. Cahoeira	260	23	179	179	40	
117	Guarapiranga	0	1	190	190	0	
118	Billings	0	1	1133	1133	0	
119	H. Borden	889	1	1	1	152	x
120	Jaguari	28	443	1236	1236	64	
121	Paraibuna	87	2096	4732	4732	127	
122	Sta Branca	56	131	439	439	144	
123	Funil	222	283	888	888	387	
124	Lajes	0	0	445	445	0	
126	Santa Cecília	0	6	7	7	44	x
127	Sobrag	60	1	1	1	90	x
130	I dos Pombos	187	8	8	8	724	x
134	S. Grande	102	78	78	78	132	x
135	P. Estrela	112	56	89	89	248	
139	Candongá	140	54	54	54	318	x
141	Baguari	140	31	38	38	872	x
143	Aimorés	330	157	186	186	1296	x
144	Mascarenhas	198	22	22	22	1216	x
148	Irapé	399	2268	5964	5964	267	
154	Itapebi	462	1634	1634	1634	660	x
155	Retiro baixo	82	201	242	242	262	
156	<b>Três marias</b>	396	4250	19528	19528	924	
162	Queimado	105	95	557	557	72	
169	<b>Sobradinho</b>	1050	5447	34116	34116	4278	
172	Itaparica	1480	7234	10782	10782	3264	
176	Comp Paf-Mox	4280	1226	1226	1226	4199	x
178	Xingó	3162	3800	3800	3800	2976	x
189	Pedra do Cavalo	160	2192	3072	3072	180	
190	B. Esperança	237	3173	5085	5085	624	
192	Guilman-Amorim	140	12	12	12	136	x
193	Sá Carvalho	78	1	1	1	83	x
195	Jauru	118	16	17	17	127	x
196	Guaporé	120	21	21	21	84	x
203	Corumbá III	96	709	972	972	278	
204	Cachoeira-Calderião	219	231	231	231	1641	x
215	Salto Pilão	192	0,1	0,2	0	110	x
217	Rosal	55	11	11	11	32	x
229	Teles Pires	1820	897	897	897	3860	x
241	Salto Rio Verdinho	93	264	264	264	254	x
249	Ourinhos	44	20	20	21	486	x
251	<b>Serra da Mesa</b>	1275	11150	54400	54400	1191	
252	Cana Brava	450	2300	2300	2300	1155	x
253	São Salvador	243	952	952	952	1170	x
257	Peixe Angical	499	2213	2741	2741	2073	

261	Lajeado	902	4940	4940	4940	3400	x
262	Salto	116	826	826	826	260	x
267	Estreito Toc	1087	5400	5400	5400	6280	x
272	Curuá-Una 3	0	130	530	530	186	
275	<b>Tucuruí</b>	8370	11293	50275	50275	14626	
276	Rondon II	73	192	478	478	138	
277	Balbina	250	9712	20006	20006	1275	
278	Manso	210	4386	7337	7337	400	
279	Samuel	217	943	3493	3493	845	
280	C. Nunes	78	25	139	139	399	x
281	P. Pedra	176	199	199	199	78	x
283	Sta Clara MG	60	146	146	146	132	x
284	Ferreira Gomes	252	137	137	137	1722	x
285	Jirau	3750	2747	2747	2747	26900	x
286	Sto Antonio Jari	370	105	133	133	1668	x
287	Sto Antônio	3568	2075	2075	2075	29120	x
288	Belo Monte	1833	4802	4802	4802	13950	x
290	Espora	32	71	209	209	72	
304	Itiquira I	61	5	5	5	80	x
305	Itiquira II	97	1	1	1	78	x
310	Dardanelos	261	0,1	0,1	0	306	x
311	Caçu	65	196	227	227	268	
312	Barra dos Coqueiros	90	300	348	348	278	x
315	Foz do Rio Claro	315	95	95	95	298	x

Tabela A.1: Informações das Hidroelétricas.

Fonte: Dados retirados de [10]

Como visto na Seção 3.1, usinas a fio d'água são aquelas em que os volumes mínimos e máximos coincidem ou são muito próximos. Na última coluna da Tabela A.1 as usinas marcadas com x são as usinas a fio d'água, que para o sistema completo de 141 usinas consideramos 77 usinas a fio d'água, e para o sistema 21, consideramos 5 usinas a fio d'água. As usinas que tem potência nula são apenas reservatórios.



## Apêndice B

### Usinas Termoelétricas

A Tabela B.1 exibe os dados das usinas termoelétricas com seus respectivos: código utilizado pelo ONS, nome, custo unitário de energia  $c_{T_j}$  nb, potência, geração mínima  $GT_{min}$  e geração máxima  $GT_{max}$  de cada usina. Em particular, os dados da terceira coluna que representam os custos unitários  $c_{T_j}$  de energia da térmica  $j$ , são os coeficientes da parcela  $CT_j$  da função objetivo 3.4. Lembre-se que esta é uma função linear como foi definida na Seção 3.2. As usinas com nomes em negrito compõem o sistema 21.

Código ONS	Nome da Usina	$c_{T_j}$ [R\$/MWh]	Potência [MW]	$GT_{min}$ [MW]	$GT_{max}$ [MW]
1	<b>Angra 1</b>	29,13	640	520	640
2	Igarape	653,43	131	0	131
4	ST. Cruz 34	310,41	436	0	436
7	Carioba	937,00	36	0	36
9	R. Silveira	500,34	25	0	25
12	Cuiaba G CC	511,70	529	0	529
13	<b>Angra 2</b>	20,12	1350	1080	1350
15	Linhares	159,28	204	0	204
19	UTE Brasilia	1047,40	10	0	10
21	Maranhão V	101,01	338	0	338
22	P. Medici A	115,90	126	11	126
23	P. Medici B	115,90	320	33	320
24	J. Lacerda C	155,85	363	3189	363
25	J. Lacerda B	186,33	262	160	262
26	J. Lacerda A1	258,42	100	25	100
27	J. Lacerda A2	195,49	132	33	132
28	Figueira	459,92	20	0	20
30	Nutepa	780,00	24	0	24
32	S. Jeronimo	248,31	20	0	20
34	W. Arjona	297,27	206	0	206
35	Uruguaiana	486,20	640	0	640
36	Maranhão IV	101,01	338	0	338
37	Argentina 1	43,02	0	0	0
38	Argentina 2A	53,10	0	0	0
39	Argentina 2B	53,10	0	0	0
40	Argentina 2C	53,10	0	0	0
42	Fortaleza	139,88	327	0	327

43	<b>TermoBahia</b>	279,04	186	0	186
46	N. Venecia 2	203,00	178	0	178
47	Termorio	236,10	0	0	0
48	<b>Araucaria</b>	0	485	0	485
49	Viana	317,58	175	0	175
50	Pirat. 12G	470,34	200	0	200
52	<b>Campina GDE</b>	317,59	169	0	169
53	Global I	361,87	149	0	149
54	Juiz de Fora	213,84	87	0	87
55	Global II	361,87	149	0	149
57	Maracanau I	300,93	168	0	168
58	TermoCeara	300,08	223	0	223
59	Argentina 2D	53,10	0	0	0
62	Eletrobolt	309,73	0	0	0
63	Ibiritermo	303,29	226	0	226
64	<b>Canoas</b>	698,14	249	0	249
65	Do Atlan CSA	0	255	234	255
67	TermoNE	32,00	171	0	171
68	Três Lagoas	195,96	0	0	0
69	TermoPB	320,68	171	0	171
70	Geramar II	317,57	166	0	166
71	Argentina 1B	53,10	0	0	0
73	Geramar I	317,57	166	0	166
74	Fafen	301,36	18	0	138
83	Vale do Açu	314,63	368	0	368
86	ST. Cruz Nova	107,86	500	0	500
90	Termomacae	533,82	929	0	929
93	Camacari D/G	943,88	347	0	347
94	Santana LM	898,56	50	0	50
96	TermoPE	70,16	533	349	533
97	CCBS	293,68	0	0	0
98	Pernambu III	260,84	201	0	201
106	ERB Candeias	60,00	0	0	0
107	Pampa Sul	50,00	0	0	0
108	Xavantes	1133,30	54	0	54
109	Altos	680,55	13	0	13
110	F. Gasparian	399,02	572	0	572
111	Aracati	680,55	11	0	11
112	Bahia I	511,84	31	0	31
113	<b>Baturite</b>	680,55	11	0	11
116	Parnaiba IV	88,97	56	0	56
117	Campo Maior	680,55	13	0	13
119	Caucaia	680,55	15	0	15
121	Crato	680,55	13	0	13
125	Enguia PECEM	680,55	15	0	15
127	Iguatu	680,55	15	0	15
133	Juazeiro N	680,55	15	0	15

135	Marambaia	680,55	13	0	13
136	Suzano MA	0	255	255	255
138	Nazaria	680,55	13	0	13
140	<b>Maua 3</b>	61,50	0	0	0
141	Maua B4	575,00	150	0	150
142	Acre	90,00	0	0	0
144	Petrolina	655,90	136	0	136
145	Costa Rica I	90,00	0	0	0
146	Sta Vitória	90,00	0	0	0
147	Prosperidade	122,68	0	0	0
149	São Sepe	65,00	0	0	0
151	Potiguar	756,39	53	0	53
152	TermoCabo	314,03	50	0	50
153	Daia	795,04	44	0	44
155	Goiania II	820,86	140	0	140
156	Candiota 3	76,10	350	0	350
159	TermoManaus	838,60	143	0	143
160	Pau ferro I	838,60	94	0	94
161	Potiguar III	756,39	66	0	66
163	P. Pecem II	125,67	365	0	365
164	Muricy	597,82	147	0	147
166	Camacari PI	597,82	150	0	150
167	P. Pecem I	114,22	720	0	720
169	Cisframa	272,20	4	0	4
170	Suape II	305,43	381	0	381
171	<b>NorteFlu-1</b>	52,42	400	400	400
172	<b>NorteFlu-2</b>	60,83	100	0	100
173	<b>NorteFlu-3</b>	116,75	200	0	200
174	<b>NorteFlu-4</b>	232,56	127	0	127
176	<b>Porto Itaqui</b>	120,83	360	0	360
182	Palmeiras GO	591,76	176	0	176
183	Do Atlântico	169,54	235	201	235
194	T Norte 2	678,04	340	0	340
201	Aparecida	302,19	166	150	166
203	C. Rocha	0	85	67	85
204	Jaraqui	0	75	63	75
205	Manauara	0	67	65	67
206	Maua B3	411,92	110	100	110
207	Ponta Negra	0	66	64	66
208	Santana W	640,96	58	0	58
209	Tambaqui	0	93	63	93
211	<b>Baixada Flu</b>	88,08	530	0	530
212	<b>Maranhão III</b>	74,91	519	482	519
213	Ebolt L1	309,73	321	0	321
214	Ebolt L13	305,82	65	0	65
215	Termorio L1	236,10	770	75	770
216	Termorio L13	304,51	266	26	266

217	T Lagoas L1	195,96	134	0	134
218	T Lagoas L13	301,94	216	0	216
219	CCBS L1	293,68	157	63	157
220	CCBS L13	300,62	59	24	59
221	Sykue I	510,12	30	0	30
223	Termoirape I	125,00	0	0	0
224	P. Sergipe I	198,80	0	0	0
226	Macaiba	896,88	6	0	6
228	O. Canoas 1	264,01	0	0	0
229	Onça Pintada	89,70	0	0	0
230	Predilecta	126,77	0	0	0
310	São José	815,43	42	0	42
313	Flores LT1	788,28	40	0	20
314	Flores LT2	788,28	40	0	40
317	Irاندوبا	836,40	25	0	25

Tabela B.1: Informações das Termoelétricas.

Fonte: Dados extraídos de [10].

Temos um total de 137 usinas termoelétricas para o sistema completo e 15 para o sistema 21. São eliminadas da modelagem do sistema as térmicas cuja geração máxima é nula ou que não tem custo. Desta forma, para o sistema 141 considera-se 105 térmicas e para o sistema 21, 14 térmicas.



## Apêndice C

### Coeficientes das funções do problema

A função objetivo do problema do planejamento 3.4, como descrita na Seção 3.2, é composta pelas parcelas: custo  $CT_j$  da térmica  $j$ , polinômio linear já especificado no Apêndice B, custo de déficit  $CD_s$ , polinômio linear, que representa o valor econômico do impacto causado pelo não suprimento da demanda de energia nas diferentes atividades econômicas do país, e o custo do intercâmbio  $CI_m$ , que é definido como o menor custo entre todas as térmicas, exceto para as linhas que saem de Itaipu em que esse custo é nulo.

A Tabela C.1 exibe o custo unitário  $c_{D_s}$  do déficit para cada subsistema  $s$  e representam os coeficientes da parcela do custo do déficit da função objetivo. Esses dados foram extraídos de [7].

Subsistema	$c_{D_s}$
SE	4944
S	4944
NE	4944
N	4944
Itaipu	0
Nó fictício	0

Tabela C.1: Custo unitário de déficit do subsistema  $s$  em  $R\$/MWh$ .

Fonte: ONS (2019).

A Tabela C.2 exibe o custo unitário  $c_{I_m}$  de energia para o intercâmbio na linha  $m$ , que representam os coeficientes da parcela do custo do intercâmbio da função objetivo. Esses dados são fictícios criados para evitar trocas desnecessárias de energia entre os subsistemas. As linhas de intercâmbio estão representadas na Figura 4.2.

$m$	Intercâmbio	$c_{I_m}$ [ $10^{-2}R\$/MWh$ ]
1	SE → S	0, 2012
2	SE → NE	0, 2012
3	SE → N	0, 2012
4	SE → Nó fictício	0, 2012
5	S → SE	0, 2012
6	NE → SE	0, 2012
7	NE → Nó fictício	0, 2012
8	N → SE	0, 2012
9	N → Nó fictício	0, 2012
10	Itaipu → SE	0

11	<b>Itaipu</b> → <b>S</b>	0
12	Nó fictício→ <b>SE</b>	0,2012
13	Nó fictício→ <b>NE</b>	0,2012
14	Nó fictício→ <b>N</b>	0,2012

Tabela C.2: Dados fictícios dos custos unitários de intercâmbio  $c_{I_m}$  entre os subsistemas.

Detalharemos agora os polinômios envolvidos na restrição de atendimento a demanda, descritos na Seção 3.2, os quais são responsáveis pela não linearidade do problema.

A Tabela C.3 exibe os coeficientes  $m_{i,0}$ ,  $m_{i,1}$ ,  $m_{i,2}$ ,  $m_{i,3}$  e  $m_{i,4}$  que representam respectivamente os valores associados ao termo independente, ao termo de grau 1, ao termo de grau 2, ao termo de grau 3 e ao termo de grau 4 da função  $\phi_{i,t}$  definida em (3.9) que representa o nível de montante do reservatório  $i$  em função do seu volume médio.

Usina $i$	$m_{i,0}$	$m_{i,1}$	$m_{i,2}$	$m_{i,3}$	$m_{i,4}$
1	892,96997	0,06209	$-1,10 \times 10^{-04}$	$1,25 \times 10^{-07}$	$-5,55 \times 10^{-11}$
2	886,00000	0	0	0	0
4	808,00000	0	0	0	0
6	735,24579	0,00349	$-1,97 \times 10^{-07}$	$6,92 \times 10^{-12}$	$-9,77 \times 10^{-17}$
7	641,77490	0,00808	$-3,70 \times 10^{-07}$	$-7,11 \times 10^{-11}$	$9,12 \times 10^{-15}$
8	622,50000	0	0	0	0
9	558,50000	0	0	0	0
10	512,00000	0	0	0	0
11	494,86990	0	0	0	0
12	467,20001	0	0	0	0
14	816,34692	0,19769	$-5,73 \times 10^{-04}$	$9,69 \times 10^{-07}$	$-6,33 \times 10^{-10}$
15	665,00000	0	0	0	0
16	573,00000	0	0	0	0
17	417,89380	0,01117	$-2,29 \times 10^{-06}$	$2,91 \times 10^{-10}$	$-1,48 \times 10^{-14}$
18	352,02979	0,00499	$-2,74 \times 10^{-07}$	$7,10 \times 10^{-12}$	0
20	775,04633	0,02639	$-1,06 \times 10^{-05}$	$1,99 \times 10^{-09}$	0
21	682,60382	0,04872	$-1,59 \times 10^{-05}$	$2,67 \times 10^{-09}$	$-1,71 \times 10^{-13}$
24	568,08978	0,01450	$-1,20 \times 10^{-06}$	$5,83 \times 10^{-11}$	$-1,12 \times 10^{-15}$
25	752,14990	0,01228	$-1,26 \times 10^{-06}$	$7,85 \times 10^{-11}$	$-1,98 \times 10^{-15}$
26	684,70288	-0,00401	$-7,94 \times 10^{-07}$	$2,79 \times 10^{-08}$	$-1,42 \times 10^{-11}$
27	594,02002	0,35164	$-2,15 \times 10^{-03}$	$7,36 \times 10^{-06}$	$-9,60 \times 10^{-09}$
28	527,35992	0,11044	$-1,89 \times 10^{-04}$	$1,93 \times 10^{-07}$	$-7,45 \times 10^{-11}$
29	789,33350	0,03966	$-1,50 \times 10^{-05}$	$3,07 \times 10^{-09}$	$-2,37 \times 10^{-13}$
30	545,89282	0,06470	$-3,24 \times 10^{-05}$	$7,39 \times 10^{-09}$	0
31	471,16479	0,00728	$-5,61 \times 10^{-07}$	$2,60 \times 10^{-11}$	$-4,85 \times 10^{-16}$
32	434,11990	0	0	0	0
33	358,32889	0,00861	$-8,84 \times 10^{-07}$	$5,29 \times 10^{-11}$	$-1,24 \times 10^{-15}$
37	432,78391	0,01496	$-6,71 \times 10^{-06}$	$1,76 \times 10^{-09}$	$-1,70 \times 10^{-13}$
38	427,50000	0	0	0	0
39	404,00000	0	0	0	0
40	369,69379	-0,00052	$1,08 \times 10^{-06}$	$-1,60 \times 10^{-10}$	$7,93 \times 10^{-15}$
42	358,00000	0	0	0	0

44	294,18091	0,00205	$-5,66 \times 10^{-08}$	$9,70 \times 10^{-13}$	$-6,70 \times 10^{-18}$
45	280,00000	0	0	0	0
46	239,17000	0,00249	$-1,26 \times 10^{-07}$	$3,05 \times 10^{-12}$	$-2,57 \times 10^{-17}$
47	542,55487	0,00636	$-6,75 \times 10^{-07}$	$5,39 \times 10^{-11}$	$-1,90 \times 10^{-15}$
48	531,50000	0	0	0	0
49	437,47189	0,00663	$-3,75 \times 10^{-07}$	$1,06 \times 10^{-11}$	0
50	384,66989	0	0	0	0
51	366,00000	0	0	0	0
52	351,00000	0	0	0	0
57	588,68958	0,04018	$-1,41 \times 10^{-05}$	$3,21 \times 10^{-09}$	$-3,02 \times 10^{-13}$
61	297,87500	0,00718	$-6,63 \times 10^{-07}$	$3,95 \times 10^{-11}$	$-9,87 \times 10^{-16}$
62	284,00000	0	0	0	0
63	258,00000	0	0	0	0
66	164,04890	0,00480	$-1,89 \times 10^{-07}$	$4,21 \times 10^{-12}$	$-3,77 \times 10^{-17}$
71	766,12500	0,16886	$-3,12 \times 10^{-04}$	$3,99 \times 10^{-07}$	$-2,25 \times 10^{-10}$
72	668,90527	2,78137	$-1,12 \times 10^{-01}$	$2,60 \times 10^{-03}$	$-2,30 \times 10^{-05}$
73	574,79980	0,31999	0	0	0
74	650,87598	0,03498	$-6,50 \times 10^{-06}$	$7,78 \times 10^{-10}$	$-3,95 \times 10^{-14}$
76	552,54492	0,02469	$-2,10 \times 10^{-06}$	0	0
77	447,73190	0,01823	$-2,87 \times 10^{-06}$	$3,00 \times 10^{-10}$	$-1,27 \times 10^{-14}$
78	397,00000	0	0	0	0
82	325,00000	0	0	0	0
86	539,86121	0,04456	$-8,15 \times 10^{-06}$	$9,32 \times 10^{-10}$	$-4,39 \times 10^{-14}$
89	693,28668	0,03963	0	0	0
90	242,92070	1,07415	$-1,10 \times 10^{-03}$	$5,21 \times 10^{-07}$	$-9,24 \times 10^{-11}$
91	401,21680	0,05009	$-1,57 \times 10^{-05}$	$3,30 \times 10^{-09}$	$-2,88 \times 10^{-13}$
92	370,00000	0	0	0	0
93	580,39093	0,02215	$-1,41 \times 10^{-05}$	$6,34 \times 10^{-09}$	$-1,15 \times 10^{-12}$
94	174,89999	3,58705	$-3,45 \times 10^{-02}$	$1,55 \times 10^{-04}$	$-2,62 \times 10^{-07}$
95	503,94479	0,54132	$-1,96 \times 10^{-03}$	$3,09 \times 10^{-06}$	0
97	209,60300	0,56950	$-4,10 \times 10^{-03}$	$2,01 \times 10^{-05}$	$-4,01 \times 10^{-08}$
98	135,77460	1,49969	$-4,86 \times 10^{-02}$	$1,08 \times 10^{-03}$	$-1,04 \times 10^{-05}$
99	79,66700	0,98476	$-1,49 \times 10^{-02}$	$1,18 \times 10^{-04}$	$-3,55 \times 10^{-07}$
101	154,67000	0	0	0	0
102	118,57110	0,18615	$-1,27 \times 10^{-03}$	$3,84 \times 10^{-06}$	0
103	244,78729	0,01345	$-1,93 \times 10^{-10}$	$8,46 \times 10^{-14}$	$-1,39 \times 10^{-17}$
110	480,61081	0,10625	$-7,03 \times 10^{-04}$	$2,59 \times 10^{-06}$	$-3,67 \times 10^{-09}$
111	293,93799	0,02397	$-9,65 \times 10^{-06}$	$2,30 \times 10^{-09}$	$-2,12 \times 10^{-13}$
112	279,89001	0	0	0	0
113	184,00000	0	0	0	0
114	94,50000	0	0	0	0
115	812,60498	0,49174	$-4,01 \times 10^{-03}$	$1,95 \times 10^{-05}$	$-3,80 \times 10^{-08}$
117	725,88867	0,12481	$-8,37 \times 10^{-04}$	$3,64 \times 10^{-06}$	$-5,88 \times 10^{-09}$
118	728,99640	0,04721	$-8,38 \times 10^{-05}$	$8,24 \times 10^{-08}$	$-2,92 \times 10^{-11}$
119	728,75000	0	0	0	0
120	579,63599	0,07408	$-5,98 \times 10^{-05}$	$3,14 \times 10^{-08}$	$-6,90 \times 10^{-12}$
121	662,43481	0,02241	$-4,40 \times 10^{-06}$	$5,50 \times 10^{-10}$	$-2,84 \times 10^{-14}$

122	592,77588	0,10445	$-8,62 \times 10^{-05}$	0	0
123	421,22781	0,10442	$-9,57 \times 10^{-05}$	$4,00 \times 10^{-08}$	0
124	387,93890	0,15170	$-5,01 \times 10^{-04}$	$1,05 \times 10^{-06}$	$-8,62 \times 10^{-10}$
126	645,01392	3,87809	$-3,79 \times 10^{-01}$	$1,90 \times 10^{-02}$	$-3,61 \times 10^{-04}$
127	436,50000	0	0	0	0
130	135,60001	0	0	0	0
134	356,00000	0	0	0	0
135	230,80400	0,27173	0	0	0
139	284,15460	2,58946	$-8,32 \times 10^{-02}$	$1,44 \times 10^{-03}$	$-9,41 \times 10^{-06}$
141	180,44560	0,17348	$-1,41 \times 10^{-03}$	0	0
143	79,90399	0,10317	$-4,81 \times 10^{-04}$	$1,54 \times 10^{-06}$	$-1,94 \times 10^{-09}$
144	60,70000	0	0	0	0
148	414,76910	0,03533	$-5,88 \times 10^{-06}$	$5,82 \times 10^{-10}$	$-2,34 \times 10^{-14}$
154	110,00000	0	0	0	0
155	591,53522	0,16425	$-2,60 \times 10^{-04}$	0	0
156	530,33179	0,00607	$-4,84 \times 10^{-07}$	$2,20 \times 10^{-11}$	$-3,85 \times 10^{-16}$
162	801,78851	0,11423	$-1,97 \times 10^{-04}$	$1,44 \times 10^{-07}$	$-2,49 \times 10^{-17}$
169	374,17899	0,00139	$-5,35 \times 10^{-08}$	$1,16 \times 10^{-12}$	$-9,55 \times 10^{-18}$
172	275,81299	0,00676	$-8,87 \times 10^{-07}$	$7,07 \times 10^{-11}$	$-2,24 \times 10^{-15}$
176	251,50000	0	0	0	0
178	138,00000	0	0	0	0
189	65,90313	0,03003	$-7,56 \times 10^{-06}$	$1,17 \times 10^{-09}$	$-7,57 \times 10^{-14}$
190	282,03391	0,00668	$-6,29 \times 10^{-07}$	$3,69 \times 10^{-11}$	$-7,80 \times 10^{-16}$
192	495,00000	0	0	0	0
193	369,50000	0	0	0	0
195	349,73999	0,30669	0	0	0
196	479,20001	0	0	0	0
203	749,67383	0,02034	$4,57 \times 10^{-05}$	$-7,84 \times 10^{-08}$	$3,52 \times 10^{-11}$
204	47,43975	0,09548	$-3,36 \times 10^{-04}$	$6,81 \times 10^{-07}$	$-5,74 \times 10^{-10}$
215	316,62201	15,23260	$-3,79 \times 10^{+01}$	$6,62 \times 10^{+01}$	$-4,33 \times 10^{+01}$
217	555,00000	0	0	0	0
229	196,33659	0,10869	$-2,46 \times 10^{-04}$	$2,67 \times 10^{-07}$	$-1,05 \times 10^{-10}$
241	370,50000	0	0	0	0
249	398,00000	0	0	0	0
251	391,40479	0,00277	$-4,36 \times 10^{-08}$	$2,90 \times 10^{-13}$	0
252	333,00000	0	0	0	0
253	264,93100	0,06881	$-1,01 \times 10^{-04}$	$7,70 \times 10^{-08}$	$-2,19 \times 10^{-11}$
257	239,28180	0,02915	$-1,80 \times 10^{-05}$	$5,66 \times 10^{-09}$	$-6,61 \times 10^{-13}$
261	212,00000	0	0	0	0
262	446,50000	0	0	0	0
267	156,00000	0	0	0	0
272	58,61240	0,01795	$4,96 \times 10^{-06}$	$-1,51 \times 10^{-08}$	$9,25 \times 10^{-12}$
275	31,78443	0,00239	$-6,75 \times 10^{-08}$	$1,05 \times 10^{-12}$	$-6,35 \times 10^{-18}$
276	261,10001	0,01310	$7,00 \times 10^{-06}$	$-9,00 \times 10^{-09}$	0
277	36,95247	0,00133	$-5,46 \times 10^{-08}$	$1,45 \times 10^{-12}$	$-1,55 \times 10^{-17}$
278	279,97000	-0,01021	$3,93 \times 10^{-06}$	$-4,77 \times 10^{-10}$	$2,03 \times 10^{-14}$
279	70,98963	0,01384	$-5,62 \times 10^{-06}$	$1,23 \times 10^{-09}$	$-1,05 \times 10^{-13}$



280	30,55788	0,25139	$-3,15 \times 10^{-03}$	$2,25 \times 10^{-05}$	$-6,08 \times 10^{-08}$
281	396,00000	0	0	0	0
283	86,00000	0	0	0	0
284	7,65071	0,18910	$-1,13 \times 10^{-03}$	$4,48 \times 10^{-06}$	$-7,19 \times 10^{-09}$
285	66,35479	0,02068	$-8,28 \times 10^{-06}$	$1,92 \times 10^{-09}$	$-1,84 \times 10^{-13}$
286	13,92494	0,35946	$-3,45 \times 10^{-03}$	$1,64 \times 10^{-05}$	$-3,01 \times 10^{-08}$
287	70,50000	0	0	0	0
288	77,37574	0,00935	$-2,10 \times 10^{-06}$	$2,79 \times 10^{-10}$	$-1,47 \times 10^{-14}$
290	559,13379	0,39964	$-2,78 \times 10^{-03}$	$9,26 \times 10^{-06}$	$-1,15 \times 10^{-08}$
304	412,00000	0	0	0	0
305	320,00000	0	0	0	0
310	231,50000	0	0	0	0
311	454,07800	0,17525	$-5,35 \times 10^{-04}$	$1,18 \times 10^{-06}$	$-1,16 \times 10^{-09}$
312	418,48099	0,17256	$-4,18 \times 10^{-04}$	$5,91 \times 10^{-07}$	$-3,20 \times 10^{-10}$
315	354,00000	0	0	0	0

Tabela C.3: Coeficientes do polinômio cota montanteFonte: Dados retirados de ONS(2009)

A Tabela C.4 exibe os coeficientes  $n_{i,0}$ ,  $n_{i,1}$ ,  $n_{i,2}$ ,  $n_{i,3}$  e  $n_{i,4}$  que representam respectivamente os valores associados ao termo independente, ao termo de grau 1, ao termo de grau 2, ao termo de grau 3 e ao termo de grau 4 da função  $\theta_{i,t}$  definida em (3.10) que representa o nível de jusante do canal de fuga da usina  $i$  em função da vazão total.

Usina $i$	$n_{i,0}$	$n_{i,1}$	$n_{i,2}$	$n_{i,3}$	$n_{i,4}$
1	886,100	0	0	0	0
2	856,090	0,00765	$-5,45 \times 10^{-06}$	$2,65 \times 10^{-09}$	$-4,60 \times 10^{-13}$
4	768,000	0	0	0	0
6	671,633	0,00101	$-1,80 \times 10^{-07}$	$2,51 \times 10^{-11}$	0
7	619,266	0,00173	$-4,89 \times 10^{-08}$	0	0
8	556,718	0,00122	$-7,51 \times 10^{-08}$	$2,17 \times 10^{-12}$	0
9	510,030	0,00177	$-7,40 \times 10^{-08}$	$1,12 \times 10^{-11}$	$-4,80 \times 10^{-16}$
10	494,202	0,00078	$-1,04 \times 10^{-07}$	0	0
11	466,010	0,00087	$-7,38 \times 10^{-08}$	$6,34 \times 10^{-12}$	$-1,90 \times 10^{-16}$
12	446,070	0,00018	0	0	0
14	747,211	0,10032	$-3,27 \times 10^{-04}$	$-1,72 \times 10^{-07}$	$1,73 \times 10^{-09}$
15	572,299	0,06461	$-2,32 \times 10^{-04}$	$4,39 \times 10^{-07}$	$-3,12 \times 10^{-10}$
16	545,356	0,01659	$-3,64 \times 10^{-05}$	$5,12 \times 10^{-08}$	$-2,64 \times 10^{-11}$
17	381,093	0,00140	$-2,01 \times 10^{-08}$	$1,06 \times 10^{-13}$	0
18	323,123	$-0,00045$	$3,99 \times 10^{-07}$	$-4,22 \times 10^{-11}$	$1,40 \times 10^{-15}$
20	754,000	0,01360	$-1,18 \times 10^{-05}$	$5,98 \times 10^{-09}$	$-1,14 \times 10^{-12}$
21	673,931	0,00865	$-1,05 \times 10^{-05}$	$7,66 \times 10^{-09}$	$-2,07 \times 10^{-12}$
24	519,320	0,00394	$-3,60 \times 10^{-07}$	$4,33 \times 10^{-11}$	$-2,60 \times 10^{-15}$
25	693,296	0,01257	$-1,27 \times 10^{-05}$	$8,51 \times 10^{-09}$	$-2,14 \times 10^{-12}$
26	624,525	0,00178	$-5,98 \times 10^{-07}$	$1,60 \times 10^{-10}$	$-1,99 \times 10^{-14}$
27	564,637	0,00555	$-1,85 \times 10^{-06}$	$3,25 \times 10^{-10}$	$-2,09 \times 10^{-14}$
28	517,200	0,00453	$-2,47 \times 10^{-06}$	$1,06 \times 10^{-09}$	$-1,87 \times 10^{-13}$
29	769,387	0,01473	$-1,02 \times 10^{-05}$	$3,78 \times 10^{-09}$	$-5,26 \times 10^{-13}$
30	510,991	0,01624	$-1,18 \times 10^{-05}$	$3,08 \times 10^{-09}$	0

31	433,000	0,00159	$-8,18 \times 10^{-08}$	$3,17 \times 10^{-12}$	0
32	398,576	0,00212	$-2,68 \times 10^{-07}$	$2,29 \times 10^{-11}$	0
33	323,460	0,00040	$4,20 \times 10^{-08}$	$-2,00 \times 10^{-12}$	$2,91 \times 10^{-17}$
37	427,541	-0,00080	$3,08 \times 10^{-06}$	$-1,35 \times 10^{-09}$	$1,90 \times 10^{-13}$
38	403,947	0,00048	$1,56 \times 10^{-06}$	$-8,13 \times 10^{-10}$	$1,22 \times 10^{-13}$
39	379,348	0,00225	$1,96 \times 10^{-07}$	$-3,24 \times 10^{-10}$	$5,88 \times 10^{-14}$
40	358,004	-0,00024	$5,60 \times 10^{-07}$	$-1,23 \times 10^{-10}$	$8,03 \times 10^{-15}$
42	323,085	0,00431	$-2,13 \times 10^{-06}$	$5,68 \times 10^{-10}$	$-5,38 \times 10^{-14}$
44	279,880	0,00009	$1,21 \times 10^{-08}$	$-5,83 \times 10^{-13}$	$7,60 \times 10^{-18}$
45	253,441	0,00057	$1,44 \times 10^{-08}$	$-1,42 \times 10^{-12}$	$2,61 \times 10^{-17}$
46	234,498	0,00070	$-2,52 \times 10^{-08}$	$4,65 \times 10^{-13}$	$-3,26 \times 10^{-18}$
47	531,390	0,00404	$-1,40 \times 10^{-06}$	$2,71 \times 10^{-10}$	0
48	503,810	0,00641	$-5,36 \times 10^{-06}$	$2,69 \times 10^{-09}$	$-5,06 \times 10^{-13}$
49	397,028	0,00439	$-1,25 \times 10^{-06}$	$1,79 \times 10^{-10}$	0
50	365,507	0,00204	$-9,79 \times 10^{-08}$	0	0
51	350,957	0,00137	$-8,06 \times 10^{-08}$	0	0
52	333,377	0,00199	$-5,50 \times 10^{-07}$	$8,25 \times 10^{-11}$	$-4,56 \times 10^{-15}$
57	510,598	0,00924	$-6,77 \times 10^{-06}$	$3,19 \times 10^{-09}$	$-5,68 \times 10^{-13}$
61	283,463	0,00130	$-6,90 \times 10^{-08}$	$1,68 \times 10^{-12}$	0
62	257,429	0,00125	$-1,11 \times 10^{-07}$	$6,12 \times 10^{-12}$	$-1,27 \times 10^{-16}$
63	235,275	0,00159	$-9,21 \times 10^{-08}$	$2,00 \times 10^{-12}$	0
66	89,580	0,00146	$-2,22 \times 10^{-08}$	$2,31 \times 10^{-13}$	$-9,10 \times 10^{-19}$
71	705,500	0,00357	$8,09 \times 10^{-06}$	$-1,97 \times 10^{-08}$	$1,22 \times 10^{-11}$
72	604,918	0,02780	$-4,63 \times 10^{-05}$	$3,36 \times 10^{-08}$	$-8,92 \times 10^{-12}$
73	602,000	0	0	0	0
74	601,886	0,00110	$4,21 \times 10^{-07}$	$-8,31 \times 10^{-11}$	$4,76 \times 10^{-15}$
76	490,039	0,00006	$2,92 \times 10^{-07}$	$-2,32 \times 10^{-11}$	$4,56 \times 10^{-16}$
77	394,416	0,00211	$-7,92 \times 10^{-08}$	$2,35 \times 10^{-12}$	$-2,71 \times 10^{-17}$
78	321,837	0,00228	$-1,40 \times 10^{-07}$	$3,84 \times 10^{-12}$	$-5,36 \times 10^{-17}$
82	257,920	0,00062	$-1,72 \times 10^{-08}$	$2,28 \times 10^{-13}$	$1,22 \times 10^{-20}$
86	479,953	0,00161	$-4,52 \times 10^{-08}$	0	0
89	659,923	0,00150	$1,60 \times 10^{-08}$	$-7,74 \times 10^{-11}$	$1,45 \times 10^{-14}$
90	470,100	0,01008	$-5,59 \times 10^{-06}$	$1,73 \times 10^{-09}$	$-2,01 \times 10^{-13}$
91	371,936	0,00193	$-8,53 \times 10^{-08}$	$2,38 \times 10^{-12}$	$-2,62 \times 10^{-17}$
92	261,363	0,00301	$-5,64 \times 10^{-07}$	$6,79 \times 10^{-11}$	$-3,03 \times 10^{-15}$
93	335,100	0,00816	$-5,67 \times 10^{-06}$	0	0
94	264,924	0,00226	$3,02 \times 10^{-07}$	$-1,66 \times 10^{-10}$	$1,76 \times 10^{-14}$
95	426,018	0,00826	$-2,41 \times 10^{-05}$	$3,49 \times 10^{-08}$	$-1,81 \times 10^{-11}$
97	136,528	0,02128	$-3,41 \times 10^{-05}$	$2,88 \times 10^{-08}$	$-9,14 \times 10^{-12}$
98	105,125	0,00367	$-3,30 \times 10^{-07}$	$2,04 \times 10^{-11}$	$-4,99 \times 10^{-16}$
99	67,441	0,00502	$-1,12 \times 10^{-06}$	$1,44 \times 10^{-10}$	$-6,93 \times 10^{-15}$
101	130,664	0,00229	$-2,35 \times 10^{-07}$	$1,86 \times 10^{-11}$	$-5,69 \times 10^{-16}$
102	97,550	0,00621	$-5,32 \times 10^{-06}$	$3,54 \times 10^{-09}$	$-9,31 \times 10^{-13}$
103	210,708	0,00154	$-1,59 \times 10^{-07}$	$1,22 \times 10^{-11}$	$-3,69 \times 10^{-16}$
110	457,350	0	0	0	0
111	277,800	0,00554	$-1,64 \times 10^{-06}$	$2,81 \times 10^{-10}$	$-1,68 \times 10^{-14}$
112	181,370	0,00557	$-1,61 \times 10^{-06}$	$2,84 \times 10^{-10}$	$-1,81 \times 10^{-14}$

113	91,920	0,00544	$-1,46 \times 10^{-06}$	$1,93 \times 10^{-10}$	$-9,65 \times 10^{-15}$
114	53,332	0,00481	$-2,40 \times 10^{-06}$	$8,99 \times 10^{-10}$	$-1,26 \times 10^{-13}$
115	90,700	0	0	0	0
117	720,000	0	0	0	0
118	728,750	0	0	0	0
119	11,500	0	0	0	0
120	555,275	0,05494	$-1,32 \times 10^{-04}$	$3,35 \times 10^{-07}$	0
121	623,767	0,04346	$-3,23 \times 10^{-04}$	$1,35 \times 10^{-06}$	$-2,18 \times 10^{-09}$
122	577,200	0	0	0	0
123	392,700	0,01031	$-5,99 \times 10^{-06}$	$1,34 \times 10^{-09}$	0
124	90,300	0	0	0	0
126	525,629	0,01922	$-1,57 \times 10^{-05}$	0	0
127	356,000	0	0	0	0
130	98,620	0,02287	$-6,10 \times 10^{-05}$	$9,00 \times 10^{-08}$	$-4,98 \times 10^{-11}$
134	254,286	0,00073	$1,38 \times 10^{-05}$	$4,95 \times 10^{-07}$	$-1,49 \times 10^{-09}$
135	204,000	0	0	0	0
139	275,700	0,01029	$-1,26 \times 10^{-05}$	$1,34 \times 10^{-08}$	$-5,48 \times 10^{-12}$
141	164,995	0,00207	$-2,61 \times 10^{-07}$	$2,16 \times 10^{-11}$	$-6,73 \times 10^{-16}$
143	58,937	0,00350	$-1,33 \times 10^{-06}$	$3,14 \times 10^{-10}$	$-2,83 \times 10^{-14}$
144	36,899	0,00284	$-1,92 \times 10^{-07}$	$4,92 \times 10^{-12}$	0
148	328,220	0,02197	$-2,48 \times 10^{-05}$	$1,39 \times 10^{-08}$	$-2,92 \times 10^{-12}$
154	26,899	0,00532	$-2,76 \times 10^{-06}$	$7,56 \times 10^{-10}$	$-7,29 \times 10^{-14}$
155	577,000	0,00687	$-2,10 \times 10^{-06}$	$3,63 \times 10^{-10}$	$-2,36 \times 10^{-14}$
156	514,656	0,00160	$-2,55 \times 10^{-07}$	$2,89 \times 10^{-11}$	$-1,18 \times 10^{-15}$
162	636,200	0,03073	$-1,55 \times 10^{-04}$	$5,08 \times 10^{-07}$	$-6,10 \times 10^{-10}$
169	359,654	0,00196	$-2,97 \times 10^{-07}$	$2,51 \times 10^{-11}$	$-7,70 \times 10^{-16}$
172	251,500	0	0	0	0
176	138,000	0	0	0	0
178	10,038	0,00666	$-2,45 \times 10^{-06}$	$4,56 \times 10^{-10}$	$-3,14 \times 10^{-14}$
189	4,144	0,00554	$-5,10 \times 10^{-06}$	$2,87 \times 10^{-09}$	$-6,08 \times 10^{-13}$
190	258,343	0,00294	0	0	0
192	375,500	0	0	0	0
193	255,100	0	0	0	0
195	248,444	-0,00891	$1,80 \times 10^{-04}$	$-8,33 \times 10^{-07}$	$1,27 \times 10^{-09}$
196	302,153	0,07490	$-4,65 \times 10^{-04}$	$1,48 \times 10^{-06}$	$-1,76 \times 10^{-09}$
203	727,913	0,01747	$-3,48 \times 10^{-05}$	$3,96 \times 10^{-08}$	$-1,64 \times 10^{-11}$
204	42,125	0,00009	$1,06 \times 10^{-07}$	$-7,85 \times 10^{-12}$	$-9,91 \times 10^{-16}$
215	111,890	0,00696	$-7,06 \times 10^{-06}$	$5,41 \times 10^{-09}$	$-1,54 \times 10^{-12}$
217	359,000	0,10583	$-2,25 \times 10^{-03}$	$1,67 \times 10^{-05}$	0
229	160,741	0,00112	$7,13 \times 10^{-10}$	$-2,16 \times 10^{-12}$	$6,56 \times 10^{-17}$
241	326,996	0,00940	$-1,35 \times 10^{-05}$	$1,20 \times 10^{-08}$	$-3,94 \times 10^{-12}$
249	1385,642	0,00372	$-1,45 \times 10^{-06}$	$5,33 \times 10^{-10}$	$-7,35 \times 10^{-14}$
251	332,798	0,00134	$8,82 \times 10^{-08}$	$-1,63 \times 10^{-11}$	0
252	284,110	0,00442	$-7,81 \times 10^{-07}$	$6,62 \times 10^{-11}$	0
253	262,681	0,00003	$4,33 \times 10^{-07}$	$-6,41 \times 10^{-11}$	$2,98 \times 10^{-15}$
257	232,680	0,00197	$-2,43 \times 10^{-07}$	$1,93 \times 10^{-11}$	$-5,89 \times 10^{-16}$
261	171,366	0,00241	$-1,36 \times 10^{-07}$	$4,48 \times 10^{-12}$	$-5,74 \times 10^{-17}$



262	393,754	0,00970	$-1,82 \times 10^{-05}$	$2,80 \times 10^{-08}$	$-1,86 \times 10^{-11}$
267	126,710	0,00218	$-1,39 \times 10^{-07}$	$4,76 \times 10^{-12}$	$-6,14 \times 10^{-17}$
272	44,659	0,01461	$-8,41 \times 10^{-06}$	0	0
275	2,673	0,00074	$-2,22 \times 10^{-08}$	$4,08 \times 10^{-13}$	$-2,87 \times 10^{-18}$
276	202,550	0,02670	$-6,00 \times 10^{-05}$	$7,00 \times 10^{-08}$	$-3,00 \times 10^{-11}$
277	22,577	0,00752	$-4,96 \times 10^{-06}$	$2,01 \times 10^{-09}$	$-3,01 \times 10^{-13}$
278	223,898	0,00457	$-4,20 \times 10^{-07}$	0	0
279	51,552	0,01299	$-5,90 \times 10^{-06}$	$1,84 \times 10^{-09}$	$-2,95 \times 10^{-13}$
280	21,306	-0,00018	$6,69 \times 10^{-06}$	$-8,33 \times 10^{-09}$	$5,26 \times 10^{-12}$
281	147,350	0,02464	$-6,67 \times 10^{-05}$	$9,44 \times 10^{-08}$	$-4,82 \times 10^{-11}$
283	31,813	0,00951	$-9,87 \times 10^{-06}$	$7,39 \times 10^{-09}$	$-2,07 \times 10^{-12}$
284	1,764	0,00124	$-1,47 \times 10^{-07}$	$1,30 \times 10^{-11}$	$-4,59 \times 10^{-16}$
285	70,500	0,00001	$4,65 \times 10^{-09}$	$-7,06 \times 10^{-14}$	$3,70 \times 10^{-19}$
286	1,512	0,00144	$1,71 \times 10^{-08}$	$-1,06 \times 10^{-11}$	$5,90 \times 10^{-16}$
287	43,440	0,00084	$-2,21 \times 10^{-08}$	$3,89 \times 10^{-13}$	$-2,90 \times 10^{-18}$
288	81,895	0,00073	$-4,66 \times 10^{-08}$	$1,80 \times 10^{-12}$	$-2,49 \times 10^{-17}$
290	527,012	0,06703	$-4,07 \times 10^{-04}$	$9,41 \times 10^{-07}$	0
304	320,000	0	0	0	0
305	178,707	0,04557	$-3,17 \times 10^{-04}$	$1,19 \times 10^{-06}$	$-1,72 \times 10^{-09}$
310	112,870	0,00340	$1,30 \times 10^{-06}$	$-7,16 \times 10^{-10}$	$5,03 \times 10^{-14}$
311	447,896	0,00413	$-9,00 \times 10^{-07}$	0	0
312	409,425	0,00641	$-1,12 \times 10^{-05}$	$1,56 \times 10^{-08}$	$-8,51 \times 10^{-12}$
315	323,934	0,01260	$-2,28 \times 10^{-05}$	$3,08 \times 10^{-08}$	$-1,73 \times 10^{-11}$

Tabela C.4: Coeficientes do polinômio cota jusante. Fonte: Dados retirados de ONS(2009)



## Apêndice D

### Coeficiente de evaporação

A evaporação foi linearizada utilizando o método dos mínimos quadrados lineares. Neste método, dado um conjunto de pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  procura-se uma função que melhor se aproxime desses pontos. No caso linear esta função tem a forma

$$y = ax + b. \quad (\text{D.1})$$

Assim, os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  devem ser determinados de tal forma que a reta esteja o mais próximo possível dos pontos dados. Denotando por  $r_i = y_i - (ax_i + b)$  o resíduo entre o valor observado e o valor ajustado no ponto  $(x_i, y_i)$ , para todos os pontos dados, o problema se torna um sistema descrito na forma

$$\begin{cases} r_1 = y_1 - (ax_1 + b) \\ r_2 = y_2 - (ax_2 + b) \\ \vdots \\ r_n = y_n - (ax_n + b) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente, como

$$r = y - A\beta$$

sendo

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

O objetivo é que o resíduo  $r$  seja o menor possível, por isso minimiza-se o resíduo resolvendo o seguinte problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{1}{2} \|y - A\beta\|^2 \\ &\text{sujeito a} && \beta \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Obtém-se então a solução do problema (D.2), ou seja, a solução do problema de mínimos quadrados, a qual é conhecida como equação normal e dada por

$$A^T A \beta = A^T y \quad (D.3)$$

Para o problema de linearização da evaporação, o polinômio associado ao reservatório  $i \in \{1, \dots, R\}$  da sua área em função de seu volume no período  $t \in \{1, \dots, T\}$  foi ajustado, por mínimos quadrados, utilizando  $y = area_{i,t}$  e  $x = V_{med_{i,t}}$  na equação (D.1), ou seja,

$$y = area_{i,t} = a_{i,t} \times V_{med_{i,t}} + b_{i,t},$$

em que

$$V_{med_{i,t}} = \frac{V_{i,t-1} + V_{i,t}}{2},$$

é o volume médio em  $[hm^3]$  do reservatório  $i$  no período  $t$ .

Para determinar os coeficientes  $a_{i,t}$  e  $b_{i,t}$ , considerou-se um conjunto de 5 pontos na solução do problema de mínimos quadrados, equação (D.3).

Para ilustrar, considere a Figura D.1 que compara o polinômio (em linha pontilhada) e sua linearização (em linha cheia) para as usinas de Foz do Areia e de Machadinho, respectivamente. Observa-se que essas linearizações são, em geral, aproximações razoáveis para os polinômios e a mesma conclusão se aplica para os demais reservatórios.

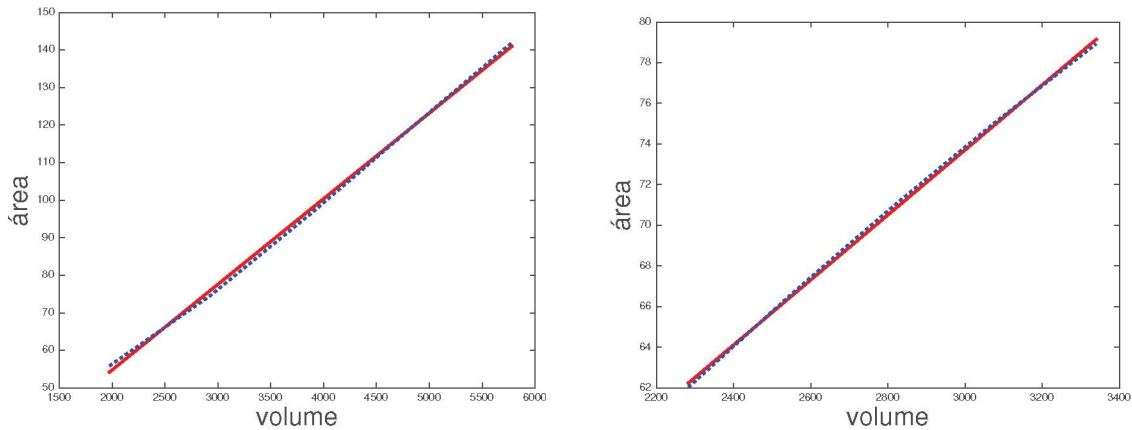


Figura D.1: Polinômio da área em função do volume e sua linearização para as usinas Foz do Areia (esquerda) e de Machadinho (direita).

Fonte: ONS (2019)